

קורס: 83-211-01

מרצה: ש. הורוביץ

כ"ד אדר תשע"ה

## מבחן בפונקציות מרוכבות

### מועד ב

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.  
משך הבחינה שלוש שעות.

1. מצאו את כל המספרים  $z \in \mathbb{C}$  כך ש-  $z^6 - 9iz^3 - 8 = 0$ .

2. נניח ש-  $f = u + iv$  פונקציה שלימה. להוכיח או להפריך: הפונקציה  $uv$  הרמונית בכל המישור  $\mathbb{R}^2$ .

3. חשבו:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^6 \sin nx}{x^2 + 2x + 5} dx$ .

4. חשבו  $\int_{|z|=3} \frac{\bar{z}^2}{\bar{z} + 4z} dz$  כאשר המסילה מתוארת נגד כיוון השעון.

5. מצאו טור לורן סביב  $2i$  של הפונקציה  $\frac{1}{(z^2 + 4)^2}$ .

6. לפי הגדרה "נקודת שבת" של פונקציה  $f$  היא נקודה  $z_0$  כך ש-  $f(z_0) = z_0$ . הוכיחו שאם  $f$  פונקציה אנליטית בעיגול היחידה הסגור  $B(0,1)$  כך שלכל  $z \in B(0,1)$   $|f(z)| < 1$ , אז קיימת ל-  $f$  נקודת שבת אחת בדיוק בעיגול  $B(0,1)$ .

**בהצלחה!**