תרגול 5 אינפי 1 למדמ"ח

1. מצאו את $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ עבור הפונקציות הבאות. בטאו את התשובה ע"י x אלא אם נאמר אחרת.

(א) $y=\sqrt{x+2}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

(ב) $y=e^{\cos x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{\cos x}\cdot(-\sin x)$$

(ג) $y=\ln\ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

(ד) $u=\ln x \quad y=\tan u$.
זה בעצם $y=\tan\ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

דרך אחרת להגיד את זה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\cos^2\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

(ה) $x=\sqrt[3]{t+1} \quad y=\sqrt[3]{t+2}$ בטאו את הפתרון גם לפי t וגם לפי x.
נשים לב שבשביל הפתרון לפי t לא צריך להתאמץ:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

ולכן

$$\frac{1}{3}(t+2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{1}{3}(t+1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\frac{t+2}{t+1})^{-\frac{2}{3}}=(\frac{1}{t+1}+1)^{-\frac{2}{3}}$$

בשביל למצוא לפי x נבטא את t לפי x:

$$x^3=t+1$$

$$x^3 - 1 = t$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\frac{1}{x^3} + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

(ו) $y = x^x$.
הטריק הוא:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

ולכן

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x \cdot \ln x}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$$

(ז) $y = \tan(\frac{e^{\sin x}}{x^2+1})$
חישוב מראה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2(\frac{e^{\sin x}}{x^2+1})} \cdot (\frac{e^{\sin x}\cos x(x^2+1) - 2xe^{\sin x}}{(x^2+1)^2})$$

2. מצאו נוסחא לנגזרת של $f(x)^{g(x)}$ (בהנחה ש $f(x) > 0$ אחרת ייתכן שהחזקה לא מוגדרת).

נשתמש בטריק דומה למה שעשינו קודם

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

ולכן

$$(e^{g(x) \ln f(x)})' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot (g' \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)})$$

3. בתחום $0 \leq t \leq \pi$ מגדירים שתי פונקציות:

$$y(t) = e^{\sin t} \quad x(t) = e^{\cos t}$$

מצאו את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $x = \sqrt{e}$ (ראוי לציין ש $e^{\cos t}$ הפיכה בתחום שלנו ולכן באמת מוגדרת פונקציה של y לפי x):

פתרון: לפי כלל השרשרת

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{\sin t}\cos t}{-e^{\cos t}\sin t} = -e^{\sin t - \cos t} \cdot \cot t$$

למצוא את t לפי x זה קשה (לפני שלומדים על פונ' טריגונומטריות הפוכות) אבל לא צריך. עבור $x = \sqrt{e}$ ערך t המתאים יהיה $t = \frac{\pi}{3}$. ולכן המספר שאנו מחפשים הוא:

$$\frac{-e^{\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$$

4. גוף נע במישור לפי המשוואות

$$y = 3t^3 \quad x = t^2 + 1$$

מצאו את שיפוע הנתיב שבו הוא נע (מבוטא לפי t)

פתרון:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9t^2}{2t} = \frac{9}{2}t$$

5. נתון כי הפונקציה הבאה גזירה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

מצאו את a, b.

השטיק הוא כמובן, שצריך שהפונקציה תהיה גזירה ב $x = 1$. נזכיר כי כדי שהפונקציה $f(x)$ תהיה גזירה ב $x = 1$ צריך שלכל אינפיניטיסימל Δx המספר

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

יהיה מספר סופי והערך הסטנדרטי שלו צריך להיות שווה לכל Δx. נבדוק מה צריך כדי שהגדרת הנגזרת תתקיים:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - a - b}{\Delta x}$$

עכשיו נפצל למקרים לפי Δx: אם $\Delta x > 0$ אז

$$\frac{f(1 + \Delta x) - a - b}{\Delta x} = \frac{2 + 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 - a - b}{\Delta x}$$

כדי שהמספר הנ"ל לא יהיה אינסופי צריך ש

$$a + b = 2$$

ואז נקבל

$$\text{st}\left(\frac{4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}\right) = 4$$

אם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f(1+\Delta x) - a - b}{\Delta x} = \frac{a + a\Delta x + b - a - b}{\Delta x} = a$$

כדי שתהיה נגזרת, צריך שהחלק הסטנדרטי יהיה תמיד שווה ולכן בהכרח צריך להתקיים

$$a = 4$$

ומהשוויון $a + b = 2$ שמצאנו קודם נסיק:

$$b = -2$$

6. עבור אילו ערכי a, b הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

גזירה פעמיים?

תשובה: כבר ראינו שבשביל שהפונקציה תהיה גזירה היא חייבת להיות

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x \leq 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$$

ואז הנגזרת היא:

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & x \leq 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$$

נבדוק אם הפונקציה הזאת גזירה שוב. שוב הבעיה עשויה להיות ב $x = 1$:

$$\frac{f'(1+\Delta x) - f'(1)}{\Delta x} = \frac{f'(1+\Delta x) - 4}{\Delta x}$$

אם $\Delta x < 0$ אז

$$\frac{f'(1+\Delta x) - 4}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{\Delta x} = 0$$

ואם $\Delta x > 0$ אז

$$\frac{f'(1+\Delta x) - 4}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x - 4}{\Delta x} = 4$$

כלומר החלק הסטנדרטי תלוי ב Δx ולכן f' לא גזירה, כלומר f' לא גזירה פעמיים, לא משנה מהם a, b.

7. נניח כי $f(x)$ היא פונקציה הפיכה. האם גם $f'(x)$ הפיכה? נניח כי $f(x)$ אינה הפיכה, האם גם $f'(x)$ אינה הפיכה?

תשובה: אין קשר בין הפיכות של פונקציה לזאת של הנגזרת. $f(x)=x$ הפיכה בעוד שנגזרתה $f'(x)=1$ אינה הפיכה. כמו כן $f(x)=x^2$ אינה הפיכה בעוד שנגזרתה הפיכה.

8. הראו כי הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

גזירה בכל נקודה. חשבו את הנגזרת שלה. שימו לב כי הנגזרת שלה אינה פונקציה חסומה בסביבת 0 (אם לא הגדרנו עדיין פונקציה חסומה, אפשר להסביר את זה בציור) למרות שהפונקציה המקורית כן חסומה בסביבת 0.

תשובה: נפריד לשני מקרים:

(א) אם $x\neq 0$ אז אפשר לגזור לפי כללי גזירה רגילים ולקבל:

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\cos\frac{1}{x^2}\cdot(-2\frac{1}{x^3})=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

(ב) אם $x=0$ אז נגזור לפי הגדרה:

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}$$

ולכן

$$f'(0)=0$$

כלומר

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

9. תהי $f(x)$ פונקציה הגזירה ב x_0 הוכיחו כי $\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x))=f(x_0)$.

הוכחה: ידוע כי

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

הוא מספר סופי, זה מחייב אותנו ש $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ יהיה אינפיניטיסימל, כלומר

$$\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$$

ולכן

$$\mathrm{st}(f(x_0+\Delta x))=\mathrm{st}(f(x_0))=f(x_0)$$

10. ראינו כבר שאם $f(x)$ גזירה ב x_0 ו $g(x)$ גזירה ב x_0 אז סכומם ומכפלתם גם כן גזירים:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(א) נניח ש f גזירה ב x_0 וg לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
אם f היא פונקציה גזירה ו g אינה גזירה אז מכפלתם יכולה להיות פונקציה גזירה למשל:

$$f(x)=0 \quad g(x)=|x|$$

אבל אם $f(x_0)\neq 0$ ו g אינה גזירה ב x_0 אז מכפלתם בהכרח אינה גזירה.
הוכחה (טיפה לא מדויקת): נניח בשלילה ש fg דווקא גזירה ב x_0. אז

$$g=\frac{fg}{f}$$

היא גם כן פונקציה גזירה ב x_0 בתור חילוק של פונקציות גזירות בסתירה לנתון ש g לא גזירה ב x_0
חוסר הדיוק הוא בכך שידוע ש $f(x)\neq 0$ רק בנקודה x_0 לכן לא ברור למה מותר לחלק בf. נוותר כאן על ההסבר המלא.

(ב) נניח ש f אינה גזירה ב x_0 וg לא גזירה ב x_0 האם הסכום או המכפלה שלהם יכולים להיות גזירים? את הסכום נשאיר כתרגיל בית. נטפל במכפלה:
במקרה הזה המכפלה יכולה להיות גזירה ויכול להיות שלא. למשל:

i. אם $f(x)=g(x)=|x|$ אז $fg=x^2$ שזה גזיר.

ii. אם $f(x)=g(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\end{cases}$ תוכיחו בתרגיל הבית שזו לא פונקציה גזירה אבל

$$fg(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{N}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}\end{cases}$$

אותה פונקציה שאינה גזירה.