

פתרון תרגיל 4 אנליזה הרמונית תשע"ט

25 בדצמבר 2018

1. ברשותכם, לא ארשום את כל חישובי האינטגרלים, אלא רק את התוצאה הסופית.

(א) הפונקציה $f(x) = x^2$ היא זוגית, ולכן $b_n = 0$. נחשב את שאר המקדמים:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx =$$

כאן צריך לעשות אינטגרציה בחלקים, פעמיים. בסופו של דבר, מקבלים:

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

סה"כ:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(ב) לפי הזהות: $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$, נקבל:

$$f(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2} - 2 \cos x + 1 = \frac{3}{2} - 2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

וזהו טור פורייה של f .

(ג) הפונקציה $f(x) = |\sin x|$ זוגית, ולכן $b_n = 0$. נחשב את שאר המקדמים:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

בגבולות האינטגרל, $0 \leq \sin x$ ולכן $|\sin x| = \sin x$ כמו כן:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx =$$

כאן, נשתמש בזהות: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$, ונקבל:

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) + \sin((1-n)x)) dx =$$

וזהו אינטגרל שאנו יודעים לחשב; נקבל בסופו של דבר:

$$a_n = \frac{2(1 + (-1)^n)}{\pi(1 - n^2)}$$

נשים לב שזה תקף כאשר $n \neq 1$; אם נדייק, כאשר $a_{2k-1} = 0$, ועבור אינדקסים זוגיים:

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)}$$

עבור $n = 1$, נקבל:

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

סה"כ:

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4k^2)} \cos 2kx$$

2. לפי זהות של זווית כפולה:

$$\sin^4 nx = (\sin^2 nx)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2nx}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 - 2 \cos 2nx + \cos^2 2nx)$$

ושוב, עם זווית כפולה:

$$= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2nx + \frac{1 + \cos 4nx}{2} \right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2nx + \frac{1}{8} \cos 4nx$$

ולכן:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin^4 nx dx =$$

$$= \frac{3}{8} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2nxdx + \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 4nxdx$$

מכיוון ש:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx$$

נקבל:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin^4 nxdx = \frac{3\pi}{8} a_0 - \frac{\pi}{2} a_{2n} + \frac{\pi}{8} a_{4n}$$