04.09.24

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – מועד ב' – תשפ"ד

משך המבחן: שלוש שעות   הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>שאלה 1</u> נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x, y, z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} ax + 2y + a^2 z = a^2 \\ -a^2 x + (1-2a)y = 1 - a^3 \\ ax + 2y + 4z = -2a \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

ב. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = 0$.

ג. מצאו את כל הפתרונות למערכת עבור $a = -2$.

<u>שאלה 2</u> יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$ ותהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T(1,0,0) = (a,1,1)$$

$$T(0,1,0) = (1,a,1)$$

$$T(1,1,1) = (a+2, a+2, a+2)$$

א. חשבו את $T(0,0,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

ב. קבעו לאילו ערכי הפמטר a המטריצה $[T]$ הפיכה.

ג. חשבו את $T(1,2,3)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

ד. חשבו את $T(x,y,z)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

<u>שאלה 3</u> נביט בשדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

א. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $(1+i)z^5 = 1$.

ב. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $z\bar{z} - z = i$.

ג. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ המקיימים כי $z + \bar{z} = 2z - \bar{z}$.

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$.

א. כאשר $f(x,y) = (x+y)^2$ והתחום D הוא השטח הכלוא בין הישרים $x = 1, x = 2, y = 2, y = 4$.

ב. כאשר $f(x,y) = y$ והתחום D הוא השטח הכלוא בין העקומות $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

ג. כאשר $f(x,y) = e^{(x^2)}$, והתחום הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}$.

דף נוסחאות מתמטיקה ב לכימאים:

מרוכבים:

חיבור וכפל מרוכבים:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הגדרה:

יהי $z=a+bi\in\mathbb{C}$ נגדיר את הצמוד המרוכב שלו בצורה הקרטזית להיות

$$\bar{z}=a-bi$$

בצורה הגאומטרית (פולארית):

$$\bar{z}=rcis(-\theta)$$

כפל מרוכב בצמוד שלו:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$$

חילוק מרוכבים:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+adi+bci}{c^2+d^2}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

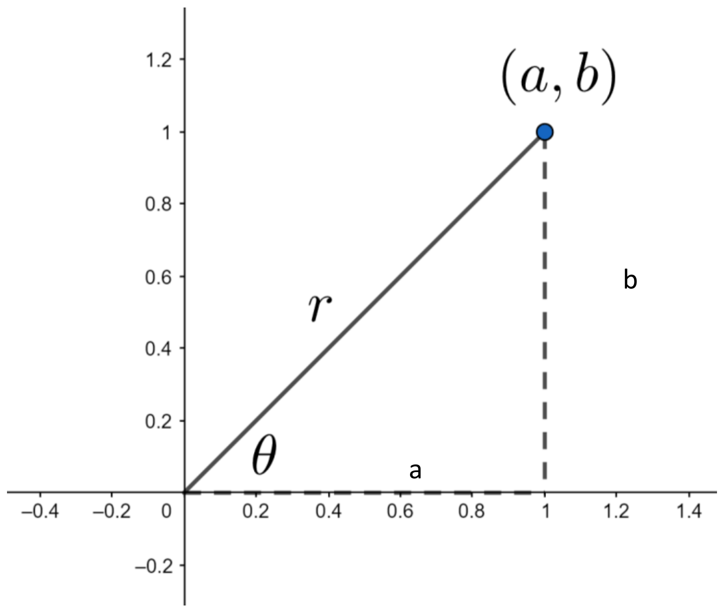
$$\sin(\theta)=\frac{b}{r}$$

$$b=r\cdot sin(\theta)$$

$$\cos(\theta)=\frac{a}{r}$$

$$a=r\cdot\cos(\theta)$$

$$\tan(\theta)=\frac{b}{a}$$



בהנתן r,θ הצורה האלגברית היא:

$$a+bi=r\cos(\theta)+i\,r\sin(\theta)=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=r\,cis(\theta)$$

כפל מרוכבים בצורה הגאומטרית

$$r_1cis(t_1)\cdot r_2cis(t_2)=r_1r_2(\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2))=r_1r_2cis(t_1+t_2)$$

משפט דה-מואבר

$$\left(r\,cis(\theta)\right)^n=r^ncis(n\theta)$$

פתרון משוואה מרוכבת אם $a+bi\neq 0$ אז יש בדיוק n פתרונות שונים.

$$z^n=a+bi$$

יהי $r\neq 0$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי הפתרונות למשוואה

$$z^n = r\,cis(\theta)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,cis\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2, \dots, n-1$$

נוסחאת השורשים :

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים במרחב.

אומרים כי V נפרש (נוצר) ע"י הוקטורים $v_1, \dots, v_k$ אם

$$V = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k | a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

סימון: אם המרחב V נפרש ע"י $v_1, \dots, v_k$ רושמים כי

$$V = span\{v_1, \dots, v_k\}$$

פעולה אלגברית בין וקטורים מכפלה סקלרית.

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

המכפלה הסקלרית של וקטור בעצמו.

$$(x, y, z) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = |(x, y, z)|^2$$

מכפלה סקלרית:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta)$$

חישוב זווית בין וקטורים $(\vec{v}, \vec{w} \neq 0)$

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\theta)$$

<u>פונקציות לינאריות:</u>

נוסחא:

$$T(x, y, z) = (x, y)$$

הגדרה: פונקציה

$$T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

פונקציה (העתקה) לינארית

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$
$$T(av) = aT(v)$$

כפל מטריצות:

$$\mathbb{F}^{m \times n} \bullet \mathbb{F}^{n \times k} = \mathbb{F}^{m \times k}$$

העתקה שגוזרת פונקציות :

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מטריצת היחידה $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

כפל במטריצת היחידה הוא כמו לכפול באחד

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

מטריצה הפיכה

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

חישוב דטרמיננטה במטריצה 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

מכפלה הוקטורית

$$|v \times w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin(\theta)$$

כיוון הוקטור מאונך לv, w.

חישוב מכפלה סקלרית

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$$

הנוסחא למכפלה וקטורית

$$(a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - yc, xc - az, ay - bx)$$

נשים לב לדבר הבא: נגדיר מטריצה P שעמודותיה הן הוקטורים העצמיים של המטריצה.

אם יש מספיר וקטורים עצמיים כך שP תהיה ריבועית.

לכסון:

$$D = P^{-1}AP$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{אלכסונית} \\ \text{העע על האלכסון}}} = P^{-1}A \underbrace{P}_{\text{וקטורים עצמיים בעמודות}}$$

הפיכת מטריצות:

1. נשים את המטריצה A ומימינה את מטריצת היחידה I
2. נדרג קנונית עד שמצד שמאל נגיע למטריצת היחידה I (אם בצד שמאל התאפסה שורה, המטריצה אינה הפיכה)
3. מצד ימין תופיע המטריצה ההופכית A^{-1}

חדוא בשני משתנים:

הקשר בין דיפרנציאל ואינטגרל עפ"י הנוסחא של ניוטון לייבניץ

$$\underbrace{\int_a^b f}_{\text{השטח}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{הקדומה}}$$

כלל הסנדוויץ'- רציפות פונקציה

$$h(x, y) \le g(x, y) \le f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0y_0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

כן רציפה.

גזירות פונקציה:

משוואת מישור דרך נקודה (x_0, y_0, z_0)

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

השיפועים A, B הם הנגזרות החלקיות לפי x, y בנקודה.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0, y_0) היא

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

<u>אינטגרלים</u>

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא תחום במישור, $f(x,y)$ מודדת את גובה גרף הפונקציה מעל כל נקודה בתחום.

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

נגזרות ואינטגרלים במשתנה אחד.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a\ln(x)}$$

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln(x)}\right)' = e^{a\ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln\left[f(x)\right]$
$y' = c^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln c$	$y = c^{f(x)}$
$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$y = e^{f(x)}$
$y' = n\left[f(x)\right]^{n-1} \cdot f'(x)$	$y = \left[f(x)\right]^n$
$y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \sin(f(x))$
$y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$	$y = \cos(f(x))$
$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$y = \tan(f(x))$

אינטגרציה בחלקים :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$fg = \int (f'g + fg')$$

$$fg = \int f'g + \int fg'$$

הנוסחא שקוראים לה "אינטגרציה בחלקים":

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int \arctan(x)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = 1 & g = \arctan(x) \\ f = x & g' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{Bmatrix} = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

שיטת ההצבה:

1. מציבים $t = g(x)$
2. גוזרים ולכן $dt = g'(x)dx$
3. מחליפים כל מופע של x ל-t, ואז פותרים את האינטגרל
4. מחזירים את t לשפה של x

הערה: אפשר להתחיל מהצבה "הפוכה" $x = g(t)$ ולהמשיך באופן דומה.

הצבה הפוכה: לחלץ את x *ולהציגו כפונקציה של* t

זהויות:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

אם יש לנו בית (גרף) שרצפתו היא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ וגובה התקרה נמדד ע"י $f(x,y)$ אזי האינטגרל הכפול מוגדר להיות

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \text{נפח הבית}$$

שינוי קואורדינטות.

$$(x,y) = (r\cos(t), r\sin(t))$$

$$dxdy \to r\,drdt$$

חישוב סקיצה של שטח הרצפה :

1. למצוא את כל נקודות החיתוך בין העקומות
2. בין כל שתי נקודות חיתוך, לראות מי מעל מי על ידי הצבת נקודה

(הסבר: לפי רציפות, בין לבין חיתוכים הפונקציות לא יכולות להחליף מעלה מטה).