<u>88-113-תרגיל 4:</u>

1. עבור המט' הבאות מצא: ע"ע,ו-ו"ע , במידה A לכסינה, מצא: מט' מלכסנת P ומט' אלכסונית D וכמו כן את: A^{-1}, A^3 ע"י שימוש בפרוק $A = PDP^{-1}$.

(רמז לחזקות: לאחר שמצאתם את הפרוק היזכרו שבעצם A^n הוא מכפלת A n פעמים (מה קורה ל P ?). השתמשו בחישוב חזקתה של מטריצה אלכסונית שהיא פשוטה מאוד...)

א. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

ב. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

ע"מ 84 תר' 2.7:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

א. לכסן את A (כלומר מצא את הפרוק הנדרש ל D אלכסונית ו P מלכסנת)

ב. חשב את A^n

2.10 תרגיל. תהא $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.

3.9 תרגיל. א. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות. הוכח: $f_A(x)=f_B(x)$ (במלים: למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני).

ב. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך שאחת מהן לפחות הפיכה. הוכח: $f_{AB}(x)=f_{BA}(x)$. [רמז: (א)]

ע"מ 87 תר' 3.13:

א. $A \in Mat_n(F)$ לכסינה. הוכח שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לנאריים ומצא גורמים אלו (רמז: למטריצות דומות אותו פולינום אופייני)

ב. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. הוכח ש A איננה לכסינה. האם זה סותר את א?

3.15 תרגיל. זוכרים את דני? עכשיו הוא חושב שיש לו הוכחה פשוטה למשפט קיילי–המילטון: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. לפי ההגדרה, $f_A(x) = |A - xI|$, לכן $f_A(A) = |A - AI| = |A - A| = |O| = 0$. מ.ש.ל. אבל דני בחור פיקח: הוא יודע ש $f_A(A)$ צריכה להיות מטריצה, והוא קיבל סקלר! מה לא נכון בהוכחה של דני? [רמז: כיצד נראית המטריצה xI? הכום אפשר להציב A במקום ה x–ים שבמטריצה צו?]

.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

האם היא ניתנת לשילוש? אם כן מצא את המשולשית לה היא דומה

4. הוכח שכל מט' אידמפוטנטית ($A^2 = A$) דומה למט' אלכסונית.