

בדידה 1 תרגיל 4

18 בדצמבר 2016

1. תהי U הקבוצה האוניברסלית.

א. הוכיחו או הפריכו: $A \cap [(B \cup A^c) \cap B^c] = \phi$.

ב. יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות המוכלות ב- U . הוכיחו כי $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

ג. יהיו $\{A_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות המוכלות ב- U . הוכיחו כי $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.
פתרון:

א. הוכחה: $A \cap [(B \cup A^c) \cap B^c] = [A \cap (B \cup A^c)] \cap B^c = [(A \cap B) \cup (A \cap A^c)] \cap B^c = [(A \cap B) \cup \phi] \cap B^c = (A \cap B) \cap B^c = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \phi = \phi$

הסבר המעברים: השוויון הראשון נובע מחוק האסוציאטיביות. השוויון השני זה חוק הפילוג. השוויון השלישי נובע מכך שחיתוך של קבוצה עם המשלים שלה זו הקבוצה הריקה. השוויון הרביעי אומר שאיחוד עם הקבוצה הריקה לא משפיע. השוויון החמישי זה שוב חוק האסוציאטיביות, השוויון השישי כשלישי והשוויון השביעי נובע מכך שחיתוך עם הקבוצה הריקה הוא ריק.

ב. הוכחה: $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i)^c \iff \neg(x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \iff \neg(\forall i \in I : x \in A_i) \iff \exists i \in I : x \notin A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$

ג. הוכחה: $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^c \iff \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \iff \neg(\exists i \in I : x \in A_i) \iff \forall i \in I : x \notin A_i \iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$

2. תהינה A, B קבוצות. הוכיחו:

א. $A \subseteq B \iff P(A) \subseteq P(B)$

ב. $A \cap B = \phi \iff P(A) \cap P(B) = \{\phi\}$

פתרון:

א. $\Leftarrow$: נניח $P(A) \subseteq P(B)$, ויהי $a \in A$, אזי $\{a\} \in P(A)$ וכיון ש- $P(A) \subseteq P(B)$ נובע ש- $\{a\} \in P(B)$, ולכן $a \in B$.

$\Rightarrow$: נניח $A \subseteq B$, ויהי $X \in P(A)$, לכן $X \subseteq A$ וכיון ש- $A \subseteq B$ נובע ש- $X \subseteq B$, ולכן $X \in P(B)$.

ב. $\Leftarrow$: נניח $P(A) \cap P(B) = \{\phi\}$, ונניח בשלילה שקיים $x \in A \cap B$, אזי $\{x\} \in P(A) \cap P(B)$ בסתירה. לכן $A \cap B = \phi$.

$\Rightarrow$: נניח $A \cap B = \phi$. נשים לב שלכל קבוצה X מתקיים ש- $\phi \in P(X)$, ולכן ברור ש- $\{\phi\} \subseteq P(A) \cap P(B)$, ונותר להוכיח את ההכלה השנייה. יהי $X \in P(A) \cap P(B)$, אזי $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ ולכן $X \subseteq A \cap B = \phi$ ולכן $X = \phi$.

3. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ב. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$
 ג. $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$
 ד. $P(A \Delta B) = P(A) \Delta P(B)$
 ה. תהי U הקבוצה האוניברסלית אזי: $P(A^c) = (P(A))^c$.
 פתרון:

א. הוכחה: $X \in P(A) \cap P(B)$ אם"ם $X \subseteq A \wedge X \subseteq B$ אם"ם $X \subseteq A \cap B$ אם"ם $X \in P(A \cap B)$.

ב. הפרכה: $A = \{1\}, B = \{2\}$ אזי $P(A) \cup P(B) = \{\phi, \{1\}\} \cup \{\phi, \{2\}\} = \{\phi, \{1\}, \{2\}\} \neq \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = P(\{1, 2\}) = P(A \cup B)$.

ג. לכל שתי קבוצות שוות $A = B$ נקבל ש- $P(A) = P(B)$ ולכן $P(A) \setminus P(B) = \phi$ אבל $P(A \setminus B) = P(\phi) = \{\phi\} \neq \phi$ תהיה ההפרכה...

ד. גם כאן קבוצות שוות יהיו הפרכה כי הפרש סימטרי של קבוצות שוות זה הקבוצה הריקה.

ה. נשים לב שלכל קבוצה X מתקיים ש- $\phi \in P(X)$ ולכן מצד אחד $\phi \in P(A^c)$, אבל כיון שגם $\phi \in P(A)$ נובע ש- $\phi \notin (P(A))^c$ לכן תמיד זה לא יתקיים.