$\mathbb{R}$ - שדה המספרים הממשיים
$\mathbb{R}^k$ – קבוצת כל האיות הסדורות של מספרים ממשיים

$x \in \mathbb{R}^k$ ("נקודה" או "ווקטור")

$$x = (x_1, x_2, \dots x_k)$$

$x_i \in \mathbb{R}$ - הרכיבים של x

$$y = (y_1, y_2, \dots y_k), y \in \mathbb{R}_k$$

חיבור

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots x_k + y_k)$$

כפל בסקלר

λ – סקלר, מספר ממשי

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots \lambda x_k)$$

$\mathbb{R}^k$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ (יחסית לפעולות הנ"ל)

מכפלה פנימית

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

תכונות

- "תבנית בילינארית" – היא ליניארית בכל אחד מהמשתנים (כאשר המשתנה השני קבוע)
$$(\lambda x + \lambda' x') \cdot y = \lambda x \cdot y + \lambda' x' \cdot y$$
- "מוגדרת חיובית" - $\forall x$, $x \cdot x \geq 0$ ו$x \cdot x = 0$ אמ"ם $x = 0$
- $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
- חילופיות - $x \cdot y = y \cdot x$

הגדרה

$$\|x\|_2 \coloneqq (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$\|x\|_2$ נקראת "הנורמה האוקלידית" של x

המושג הכללי של נורמה

אם $\underline{X}$ מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$

הגדרה

נורמה על $\underline{X}$ היא פונקציה $\|\ \|: \underline{X} \to [0, \infty)$ עם התכונות הבאות:

א) מוגדרות $\|x\| = 0$ אמ"ם $x = 0$
ב) הומוגניות $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

ג) א"ש המשולש $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ לכל $x, y \in \overline{X}$

הגדרה נורמה הקית

ה"נורמה" הקית של $x \in \mathbb{R}^k$ מוגדרת עבור כל $1 \le p < \infty$ ע"י

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

טענה

$\|x\|_p$ היא נורמה על $\mathbb{R}^k$ לכל p כנ"ל

הוכחה

(א) ו(ב) טריוויאלים

(א) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0$ דהיינו $x_i = 0$ לכל i דהיינו $x = 0$

(ב) $\|\lambda x\|_p^p = \sum_{i=1}^{k} |\lambda x_i|^p = \sum_i |\lambda|^p |x_i|^p = |\lambda|^p \sum_i |x_0|^p \Leftarrow \|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$

כדי להוכיח ש$\| \quad \|_p$ מקיים את אי שוויון המשולש, נוכיח תחילה את א"ש הולדר(Hölder)

משפט(א"ש הולדר)

יהי $1 < p < \infty$ ונסמן בq את ה"מעריך הצמוד" של p, דהיינו $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(q = \frac{p}{p-1})$

אזי: $\boxed{|x \cdot y| \le \|x\|_p \|y\|_q}$

מקרה פרטי

$q = 2 \Leftarrow p = 2$

$|x \cdot y| \le \|x\|_2 \|y\|_2$ – אי שוויון קושי שוורץ - $\left|\sum x_i y_i\right| \le \left(\sum x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum y_i^2\right)^{1/2}$

הוכחת משפט הולדר

אם $x = 0$ או $y = 0$ – טריוויאלי(צד שמאל = 0) לכן נניח $x \ne 0$ ו$y \ne 0$

אם הוכחנו את אי השוויון כאשר כל רכיבי x וy הם <u>אי שליליים</u>, אז אי השוויון הכללי נובע מזה כדלקמן:

$$|x \cdot y| = \left|\sum_i x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{k} |x_i||y_i| = \tilde{x} \cdot \tilde{y}$$

$|x_i|$ רכיבי $\tilde{x} = (|x_1|, \dots |x_k|)$

$|y_i|$ רכיבי $\tilde{y} = (|y_1|, \dots |y_k|)$

<u>מניחים לכן:</u> $y \ne 0, x \ne 0$
$y_i \ge 0, x_i \ge 0$

$$0 < t < \infty$$
$$f(t) = \log t$$
$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$$

המיתר ab מתחת לגרף של $y = \log t$, כאשר $0 < a < b$ על גרף הפונקציה

$\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$ ממוצע משוקלל - $a < \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b < b$. נקודת הy שלה תהיה $\frac{1}{p}\log a + \frac{1}{p}\log b$, לכן
$\frac{1}{p}\log a + \frac{1}{q}\log b \le \log\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$

לפי תכונות הלוגריתמים:

$$\log a^{\frac{1}{p}} + \log b^{\frac{1}{q}} \le \cdots$$
$$\log\left(a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}\right) \le \cdots$$
$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$
$$\alpha = a^{\frac{1}{p}}, \beta = b^{\frac{1}{q}}$$
$$\underset{\forall \alpha,\beta \ge 0}{\boxed{\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}}}$$

זהו שוויון סימטרי, ולכן הוא נכון גם אם $a > b$ ($\alpha > \beta \Leftarrow$)

נחזור ל*x,y*:

$$x_i, y_i \ge 0$$
$$x_i y_i \le \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}$$
$$(*) x \cdot y = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \le \frac{1}{p}\sum x_i^p + \frac{1}{q}\sum y_i^q \le \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q$$

נגדיר: $x' := \frac{1}{\|x\|_p}x, y' = \frac{1}{\|y\|_p}y$

לפי (*) עבור x', y',

$$x'y' \le \frac{1}{p}\|x'\|_p^p + \frac{1}{q}\|y'\|_q^q$$
$$\|x'\|_p = 1, \|y'\|_q = 1$$
$$x'y' \le \frac{1}{p}\|x'\|_p^p + \frac{1}{q}\|y'\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{\|x\|_p}\frac{1}{\|y\|_q} x \cdot y \le 1$$
$$x \cdot y \le \|x\|_p \|y\|_q$$

מ.ש.ל.

משפט

$\| \quad \|_p$ הוא נורמה על $\mathbb{R}^k$ (לכל $1 \le p \le \infty$)

הוכחה

כבר בדקנו ש$\|\ \|_p$ מקיים את התנאים של מוגדרות חיוביות והומוגניות. נשאר להוכיח את אי שיוויון המשולש $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.

אם $p=1$ א"ש המשולש טריוויאלי:

$$\|x+y\|_1 = \sum_i |x_i+y_i| \le \sum_i (|x_i|+|y_i|) = \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

אפשר להניח ש$\|x+y\|_p > 0$ (אחרת – טריוויאלי)

אם כבר הוכחנו את אי השוויון עבור המקרה של רכיבים אי שליליים, המקרה הכללי נובע כדלקמן:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\le |x_i|+|y_i|}{}^p \le \sum_i (|x_i|+|y_i|)^p$$

$$\|x+y\|_p \le \left[\sum_i (|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/p} = \|\tilde{x}+\tilde{y}\|_p \le \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p$$

$$= \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

עיקר ההוכחה

$1<p<\infty$, $y_i, x_i \ge 0$, $\|x+y\|_p > 0$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_i (x_i+y_i)^p = \sum x_i (x_i+y_i)^{p-1} + \sum y_i (x_i+y_i)^{p-1} \le \cdots$$

$p>1$ ולכן הולנדר נכון

$$\cdots \le \left(\sum x_i^p\right)^{1/p} \left[\sum (x_i+y_i)^{(p-1)q}\right]^{1/q} + \left(\sum y_i^p\right)^{1/p} \left[\sum (x_i+y_i)^{(p-1)q}\right]^{1/q}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\|x+y\|_p^{p/q}$$

נחלק בגורם החיובי $\|x+y\|_p^{p/q}$:

$$\|x+y\|_p^{\overbrace{p-\frac{p}{q}}^{=p\left(1-\frac{1}{q}\right)=1}} \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

מ.ש.ל.

הגדרה

הנורמה $\|\ \|_\infty$ מוגדרת על $\mathbb{R}^k$ ע"י

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le k}|x_i|$$

א) מוגדרות: $|x_i| \le \|x\|_\infty$ לכל i. $\|x\|_\infty = 0 \Leftarrow x_i = 0$ לכל i, ז"א $x = 0$. $\Leftarrow$ טריוויאלי

ב) הומוגניות: $\|\lambda x\|_\infty = \max_i|\lambda||x_i| = |\lambda|\max_i|x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty$

ג) $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \Leftarrow \forall i, |x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$