

בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (07-05-132-88) - מועד א'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', ט' אדר א' תשע"ו (18.2.16)

מרצים: בועז צבאן, מיכאל שיין.

מתרגלים: ניר שוורץ, איתמר שטיין, מני שלוסברג.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

הנחיות

א. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה בלבד. לאחר שמצאת פתרון, כתוב אותו בצורה מסודרת במקום המתאים בגוף הבחינה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא לתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

| ניקוד (לשימוש הבודקים) | ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול) |
|------------------------|-----------------------------------|
| | 1 |
| | 2 |
| | 3 |
| | 4 |
| | 5 |
| | סדר ונקיון |
| | סה"כ |

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את משפט ויירשטראס השני: כל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.

תשובה:

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבע האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{10n+9 \sin n}$

תשובה:

שאלה 3

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמתכנסת לגבול a הוכח שאם

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

לכל מספר טבעי n , אזי מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

תשובה:

שאלה 4

- א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ רציפה במידה שווה בתחום A ".
- ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בכל \mathbb{R} . הוכח שהפונקציה $f(x + 5776) - f(x)$ הינה חסומה.

תשובה:

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בכל נקודה פנימית של הקטע הזה. נניח כי $f'(c) \neq 1$ לכל $c \in (a, b)$. נקודה c נקראית נקודת שבת של הפונקציה $f(x)$ אם $f(c) = c$. הוכח כי לפונקציה $f(x)$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת בקטע $[a, b]$.

תשובה: