פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 2

.1

א. $\lim_{n\to\infty} z_n = -\frac{1}{2}$

ב. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n)$ לא קיים, ולכן גם $\lim_{n\to\infty} z_n$ לא קיים.

ג. $\lim_{n\to\infty} z_n = e^{-2} + 4i$

ד. בקואורדינטות פולריות, $z_n = e^{i\frac{\pi n}{3}}$. ולסדרה אין גבול. (למשל כי לסדרת החלקים הממשיים $\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, אין גבול)

2. נעזר בנוסחת קושי הדמר, $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

א. רדיוס ההתכנסות מקיים $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = 1 \Rightarrow R = 1$, והמרכז הוא בנקודה $-i$. על שפת העיגול נוכל לרשום $z + i = e^{i\theta}$ עבור θ ממשי. ואז הטור בערכים מוחלטים הוא $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{e^{in\theta}}{(n+1)(n+2)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ שמתכנס. מכאן שעל השפה יש התכנסות בהחלט, ובפרט התכנסות. לסיכום, תחום ההתכנסות הוא $\{z \in \mathbb{C} : |z+i| \le 1\}$.

ב. נציב $w = \frac{z+1}{z-1}$ בטור, ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות מקיים $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 3^n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$. גם כאן ניתן לבדוק ולראות שיש התכנסות (בהחלט) על השפה. ולכן תחום ההתכנסות הוא $\{|w| \le 3\}$. נפשט קצת את תחום ההתכנסות:

$$|w| \le 3 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right| \le 3 \Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 \le 9 \Leftrightarrow |z+1|^2 \le 9|z-1|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,z + 1 \le 9|z|^2 - 18\,\mathrm{Re}\,z + 9$$

$$\Leftrightarrow 8|z|^2 - 20\,\mathrm{Re}\,z + 8 \ge 0 \Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 - 20x + 8 \ge 0 \Leftrightarrow 8\left(x - \frac{20}{16}\right)^2 - 8\left(\frac{20}{16}\right)^2 + 8y^2 + 8 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 \ge \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

מדובר במשלים של העיגול הפתוח, שמרכזו בנקודה $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ורדיוסו באורך $\frac{3}{4}$ יחידות.

ג. נחלק לשלושה מקרים:

1) $|z|>1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור, בערך מוחלט הוא

$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \ge \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{|z|^n-1}{1+|z|^n} \to 1 \ne 0$ ולכן אין התכנסות (ע"פ התנאי ההכרחי להתכנסות טורים).

השתמשנו כאן באי שווין המשולש במכנה, ובי שוויון המשולש ההפוך במונה.

2) $|z|<1$: במקרה זה האיבר הכללי של הטור בערך מוחלט הוא

$\left|\frac{1-z^n}{1+z^n}\right| \ge \frac{\left|1-|z|^n\right|}{1+|z|^n} = \frac{1-|z|^n}{1+|z|^n} \to 1 \ne 0$ ושוב אין התכנסות.

3) $|z|=1$: הודעתי שמקרה זה לא הייתם צריכים להוכיח. בכל מקרה יש התכנסות אך ורק אם $z=1$. בשאר מעגל היחידה אין התכנסות.

ד. נציב $w=z^3-i$ ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty} n!w^n$. במונחים של w רדיוס ההתכנסות הוא אפסס. ולכן יש התכנסות עבור $z^3=i \Leftrightarrow z^3-i=0 \Leftrightarrow w=0 \Leftrightarrow |w|=0$. כלומר התכנסות בשלוש נקודות בלבד,

$z_1=-i, z_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$

.3

א. $$f(z)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\frac{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)}{z\bar{z}}+\left[\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)-\frac{1}{(z\bar{z})^2}\right]i$$

ב. $$f(z)=\frac{2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-5\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^3-3}{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}-\pi\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)^2}+\frac{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}-1\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}-2\right)}{\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}+e\right)^2}i$$

.4

א. $u=x^3, v=y^3$. משוואת קושי רימן הראשונה היא אם $3x^2=3y^2$, והשנייה היא $0=0$ שמתקיימת תמיד. בסה"כ תנאי קושי רימן מתקיים בקבוצה $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2=y^2\right\}$

ב. תנאי קושי רימן מתקיים בכל המישור.

ג. כאן $u=2x, v=y$. משוואת קושי רימן הראשונה היא $2=1$ שאינה מתקיימת כלל. לכן אין שום נקודה בה תנאי קושי רימן מתקיים.

ד. $u=x^3+y^5, v=0$ משוואות קושי רימן הן $3x^2=0$ ו- $5y^4=0$, ולכן קושי רימן מתקיים אך ורק בנקודה $(0,0)$.