

שאלות לתרגול נוסף

1. תהי $K \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה שהסופרימום שלה הוא S .
 - (א) הוכיחו כי קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \frac{1}{10} < x \leq S$.
 - (ב) הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \varepsilon < x \leq S$.
2. יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות המקיימות $a_n + b_n \rightarrow a + b$ וגם $a_n - b_n \rightarrow a - b$. הוכיחו כי $a_n \rightarrow a$ וכן $b_n \rightarrow b$.
3. עבור $x \in \mathbb{R}$, **הערך השלם** של x (מסומן $[x]$) מוגדר להיות המספר השלם m המקיים $m \leq x < m + 1$. לדוגמא: $[-0.5] = -1$, $[0] = 0$, $[7.1] = 7$, $[3.5] = 3$.
 - (א) הוכיחו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x - 1 < [x] \leq x$.
 - (ב) הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{[\frac{2}{3}n]}{n}$ מקיימת $a_n \rightarrow \frac{2}{3}$.
4. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n] = [L]$.
5. הוכיחו שלסדרה $a_n = \frac{1}{2} \sin(2^n)$ יש תת-סדרה מתכנסת במובן הצר (כלומר לגבול סופי).
6. כזכור, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. השתמשו בעובדה זו כדי להוכיח $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n^2)^{\frac{1}{1+n^2}} = 1$.
7. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
 - (א) הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.
 - (ב) תנו דוגמא לסדרה $\{a_n\}$ כזו עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = e^3$.
8. הוכיחו: אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(2x) = L$.
9. חשבו את הגבול של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 2 \\ x & x < 2 \\ \frac{x}{2} & x < 2 \end{cases}$$

בנקודה $x = 2$

10. עבור אילו ערכי a הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x > 3 \\ x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

רציפה בנקודה $x = 3$?

11. היעזרו בזהות הטריגונומטרית $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ על מנת לחשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

12. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבת $x = 0$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f רציפה ב- $x = 0$, אז גם f^2 רציפה ב- $x = 0$.

(ב) אם f^2 רציפה ב- $x = 0$, אז f רציפה ב- $x = 0$.

13. הפונקציות f ו- g מוגדרות בסביבת הנקודה x_0 , f רציפה ב- x_0 ו- g אינה רציפה ב- x_0 .

(א) הוכיחו שאם $f(x_0) = 0$ ו- g חסומה בסביבת x_0 , אז $f \cdot g$ רציפה ב- x_0 .

(ב) הוכיחו שאם $f \cdot g$ רציפה ב- x_0 , אז $f(x_0) = 0$.

14. הוכיחו שלפונקציה $f(x) = [x]$ (הערך שלם של x) יש נקודת אי-רציפות מסוג ראשון בנקודה $x = 1$ (כלומר הגבולות החד-צדדיים בנקודה זו קיימים וסופיים, אך שונים).

15. הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בכל נקודה ומקיימת $|f(x)| \leq 7$ לכל x . הוכיחו כי למשוואה $2x + f(x) = 3$ קיים פתרון.

16. הוכיחו שאם $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אז קיימת נקודה $x_0 \in (0, 10)$ כך ש- $f(x_0) = \frac{f(1) + f(8)}{2}$.

17. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $(0, 1)$. רמז: הרחיבו את הפונקציה לקטע הסגור $[0, 1]$.

18. הוכיחו לפי ההגדרה שהפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ אינה גזירה מימין ב- $x = 0$.

19. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = |x|$ רציפה ב- $x = 0$ אך אינה גזירה שם.

20. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+h} - 1}{h}$ (רמז: מה הקשר בין גבול זה לבין הפונקציה $f(x) = \sqrt[5]{x}$?)