

אינטגרלים לא אמיתיים.

1. הגדרות ודוגמאות ראשונות.

הגדרה 1: האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$ נקרא אינטגרל לא אמיתי אם אחד התנאים הבאים מתקיימים:

1. קיימת לפחות נקודת אי-רציפות של f בין a ל- b ובנקודה הזאת יש ל- f גבול (אפילו חד צדדי) אין סופי.
2. לפחות אחד מגבולות האינטגרציה הוא אינסופי.

דוגמאות: 1. $I = \int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

2. $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$

הגדרה 2: נניח שהפונקציה f רציפה על הקטע $[a, b]$ אבל אינה רציפה משמאל ב- b , אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow b^-} \int_a^\lambda f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים.

דוגמאות:

1. $I = \int_0^2 \frac{dx}{x-2}$, דהיינו: $I = \lim_{\lambda \rightarrow 2^-} \int_0^\lambda \frac{dx}{x-2}$

$$\int_0^\lambda \frac{dx}{x-2} = [\ln |x-2|]_0^\lambda = \ln(2-\lambda) - \ln 2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2^-} (2-\lambda) = 0^+ \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 2^-} \ln(2-\lambda) = -\infty \Rightarrow I = -\infty$$

האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתבדר.

2. נחשב את $I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. הפונקציה $f: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ הנתונה רציפה על הקטע $[1, 2]$

אבל אי-רציפה משמאל ב-2. נגדיר $I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{2} \right]_1^\lambda = \arcsin \frac{\lambda}{2} - \arcsin \frac{1}{2} = \arcsin \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{6}$$

מזה נובע: $I = \lim_{\lambda \rightarrow 2^-} I(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. האינטגרל הלא אמיתי הנתון מתכנס.

הגדרה 3: נניח שהפונקציה f רציפה על הקטע $(a, b]$ אבל אינה רציפה מימין ב- a , אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow a^+} \int_\lambda^b f(x)dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים. אם הגבול קיים והוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I = \int_0^1 x \ln x \, dx$. הפונקציה $f: x \rightarrow x \ln x$ הנתונה רציפה על הקטע $(0,1]$

אבל אי רציפה מימין ב-0. נגדיר: $I(\lambda) = \int_\lambda^1 x \ln x \, dx$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_\lambda^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lambda^2 \ln \lambda + \frac{1}{4} \lambda^2$$

קל לאשר ש- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^2 \ln \lambda = 0$. לכן $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = -\frac{1}{4}$.

הגדרה 4: נתונים שלושה מספרים ממשיים a, b, c כך ש- $a < c < b$. נניח שהפונקציה f רציפה על $[a, c) \cup (c, b]$ וש- c הפונקציה f אי-רציפה. אזי:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow c^-} \int_a^\lambda f(x) dx + \lim_{\lambda \rightarrow c^+} \int_\lambda^b f(x) dx$$

בתנאי ששני הגבולות קיימים.

אם $\int_a^b f(x) dx$ קיים ואם הוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I = \int_{-1}^2 x^2 \ln |x| \, dx$. הפונקציה $f: x \rightarrow x^2 \ln |x|$ הנתונה רציפה על $[-1, 0)$

ועל $(0, 2]$, אבל ב-0 היא אי-רציפה. נגדיר:

$$I_1(\lambda) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^-} \int_{-1}^\lambda x^2 \ln |x| \, dx ; I_2(\lambda) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \int_\lambda^2 x^2 \ln |x| \, dx$$

$$I_1(\lambda) = \int_{-1}^\lambda x^2 \ln |x| \, dx = \int_{-1}^\lambda x^2 \ln(-x) \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(-x) - \frac{1}{9} x^3 \right]_{-1}^\lambda = \frac{1}{3} \lambda^3 \ln(-\lambda) - \frac{1}{9} \lambda^3 - \frac{1}{9}$$

$$I_2(\lambda) = \int_\lambda^2 x^2 \ln |x| \, dx = \int_\lambda^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 \right]_\lambda^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} \lambda^3 \ln \lambda + \frac{1}{9} \lambda^3$$

קל לאשר ש- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^3 \ln(-\lambda) = 0$ וש- $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^3 \ln \lambda = 0$. לכן:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} I_1(\lambda) + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I_2(\lambda) = -\frac{1}{9} + \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} = \frac{8}{3} \ln 2 - 1.$$

הגדרה 5: נניח שהפונקציה f רציפה על הקרן $[a, +\infty)$. אזי:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^\lambda f(x) dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים. אם הגבול קיים ואם הוא סופי, אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) הוא מתבדר.

דוגמא: נחשב את $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. נגדיר $I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2}$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^\lambda = \frac{-1}{\lambda} + 1 \Rightarrow I = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{\lambda} + 1 \right) = 1.$$

הגדרה 6: נניח שהפונקציה f רציפה על הקרן $(-\infty, b]$. אזי:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^b f(x) dx$$

בתנאי שהגבול הזה קיים.

דוגמא: נחשב את $I = \int_{-\infty}^0 e^x dx$. נגדיר $I(\lambda) = \int_\lambda^0 e^x dx$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_\lambda^0 e^x dx = \left[e^x \right]_\lambda^0 = 1 - e^\lambda \Rightarrow I = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (1 - e^\lambda) = 1.$$

הגדרה 7: נניח שהפונקציה f רציפה על $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ כולו. אזי:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^a f(x) dx + \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_a^\mu f(x) dx$$

בתנאי ששני הגבולות קיימים.

דוגמא: נחשב את $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. נגדיר: $I_1(\lambda) = \int_\lambda^0 \frac{dx}{1+x^2}$; $I_2(\mu) = \int_0^\mu \frac{dx}{1+x^2}$

$$I_1(\lambda) = \int_\lambda^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan \lambda \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I_1(\lambda) = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2(\mu) = \int_0^\mu \frac{dx}{1+x^2} = \arctan \mu \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow +\infty} I_2(\mu) = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad \text{לכן:}$$

הגדרה 8: אם הגבול (הגבולות) המגדיר (המגדירים) את האינטגרל הלא אמיתי קיים וסופי (קיימים וסופיים), אומרים שהאינטגרל הלא אמיתי מתכנס. אחרת (מה זאת אומרת?) האינטגרל הלא אמיתי מתבדר.

הערה: האינטגרל הלא אמיתי מתבדר אם הוא אינסופי או אם הוא לא מוגדר (דהיינו – הוא נתון על ידי גבול שאיננו קיים).

דוגמאות:

1. נחשב את $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. בשביל זה נגדיר $I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{x}$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{x} = \left[\ln x \right]_1^\lambda = \ln \lambda - \ln 1 = \ln \lambda \Rightarrow I = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda) = +\infty.$$

2. האינטגרל $I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ מתבדר; נגדיר $I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{dx}{1-x}$. אזי:

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{dx}{1-x} = \left[-\ln(1-x) \right]_0^\lambda = -\ln(1-\lambda) \Rightarrow I = \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} I(\lambda) = +\infty.$$

3. לכל מספר ממשי $b > 0$, מתקיים $\int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$. לביטוי הזה אין גבול ב- $+\infty$.
 לכן האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ מתבדר.

טענה 1: האינטגרל $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$.

הוכחה: יהי $I_p(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{dx}{x^p}$ אזי $I_p(\lambda) = \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^\lambda = \frac{1}{1-p} \lambda^{1-p} - \frac{1}{1-p}$

אם $p > 1$, אזי $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-p} = 0$ ו- $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_p(\lambda) = \frac{1}{p-1}$. ז"א שהאינטגרל הלא אמיתי הזה מתכנס.

אם $p \leq 1$, אזי $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1-p} = +\infty$ והאינטגרל הלא אמיתי הזה מתבדר.

תרגיל פתור

1. לחשב את כל הפונקציות הקדומות של $f: x \rightarrow \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

2. האם האינטגרל $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ מתכנס או מתבדר? נמק את תשובתך.

פיתרון:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה f הוא: $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases}$ זאת אומרת $D_f = (1, +\infty)$

על הקרן $(1, +\infty)$ הפונקציה f רציפה (הוכח את זה ע"פ משפטים קלאסיים!), לכן יש לה פונקציות קדומות. נסמן ב- F את אחת הפונקציות האלה. כדי לחשב אותן, נשתמש בשיטת ההצבה:

נציב: $t = \ln(\ln x)$. לכן $\frac{dx}{x \ln x} = dt$. מזה נובע:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{dx}{x \ln x} \cdot \frac{1}{\ln(\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \int \ln t + c = \ln |\ln(\ln x)| + c.$$

2. בלי הגבלת כלליות, אפשר להניח בשאלה הנתונה ש- $C = 0$. ההתכנסות של האינטגרל הנתון שקולה לקיום גבול סופי ב- $+\infty$ עבור $F(x)$.

אבל $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$,

לכן $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$,

ומכאן $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\ln x)) = +\infty$.

לכן האינטגרל הנתון מתבדר.

2. קריטריונים להתכנסות או להתבדרות

שתי הטענות הבאות נותנות לנו קריטריונים להתכנסות ו/או להתבדרות של אינטגרלים לא-אמיתיים, אבל לא מאפשרות לנו לחשב את הערך ה"מספרי" של אינטגרל מתכנס.

משפט 1 (קריטריון ההשוואה):

נתונות שתי פונקציות f ו- g רציפות על $[a, +\infty)$ כך שלכל $x \in [a, +\infty)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

1. אם $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס.

2. אם $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתבדר, אז $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתבדר.

הוכחה: נתון שלכל $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in [a, +\infty)$ לכל $\lambda \geq a$ $0 \leq \int_a^\lambda f(x)dx \leq \int_a^\lambda g(x)dx$,

והפונקציה $\int_a^\lambda f(x)dx \rightarrow \lambda$ היא פונקציה עולה של המשתנה λ . על פי משפט הסנדביץ', אם ל-

$\int_a^\lambda g(x)dx$ גבול סופי כאשר $\lambda \rightarrow +\infty$, אזי גם ל $\int_a^\lambda f(x)dx$ גבול סופי כאשר $\lambda \rightarrow +\infty$. הסעיף

השני מוכח בצורה דומה. נשאיר את ההוכחה לקורא.

דוגמאות:

1. מתכנס משום שלכל $x > 1$, $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$ ו- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנס (ע"פ הטענה הנ"ל).

2. מתבדר משום שלכל $x > 1$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$ ו- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ מתבדר (על פי הטענה הנ"ל).

בעצם, ניתן להגיע לאותן התוצאות בדרך ישרה, בלי קריטריון ההשוואה. קריטריון אחר, מאוד שימושי, הוא קריטריון המנה שנביא כאן ללא הוכחה:

משפט 2 (קריטריון המנה): נתונות שתי פונקציות f ו- g חיוביות רציפות על $[a, +\infty)$. נניח

שלמנה $\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים גבול סופי $L > 0$ כש- $x \rightarrow +\infty$. אז האינטגרלים הלא-אמיתיים $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

ו- $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים שניהם.

דוגמאות:

1. נסמן $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ו- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2}$. לכן

האינטגרלים הלא אמיתיים $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנסים או מתבדרים שניהם. כיוון ש

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ מתכנס (ע"פ הטענה האחרונה בסעיף הקודם), האינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנס.

2. נעיון באינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

נסמן $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

אזי $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

מזה נובע ש- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

ידוע ש- $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ מתבדר. לכן האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ מתבדר.