חדו"א 1 להנדסה – 83112 – בוחן שלישי – 4.3.24

משך הבוחן: שעה וחצי

חומר עזר: מחשבון בלבד

הוראות: יש לענות על כל השאלות, משקל כל שאלה 36 נק'

1. תהי פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(0)=0$. עוד נביט בפונקציה $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

   א. (18 נק') הוכיחו כי אם $h$ גזירה ב$x=0$ אזי $h'(0)=0$.

   ב. (18 נק') חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin^2(x)}$

2. יהי פרמטר $a\in\mathbb{R}$.

   א. (8 נק') חשבו את הגבול הבא, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר $a$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin(ax)}{x}\right)$$

   ב. (14 נק') הוכיחו כי אם $a>1$ אזי למשוואה $x=\sin(ax)$ יש לפחות שני פתרונות שונים.

   ג. (14 נק') הוכיחו כי למשוואה $x=\cos(2x)$ יש בדיוק פתרון אחד.

   (העזרו בעובדה כי בטווח $[-1,1]$ הפתרון היחיד למשוואה $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$ הוא $x=-\frac{\pi}{12}$.)

3. נביט בסדרה המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי $a_{n+1}=a_n+\sin(a_n)$, ויהי $k\in\mathbb{Z}$ מספר שלם.

   א. (10 נק') חשבו את המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x)=x+\sin(x)$ בקטע $[\pi k,\pi k+\pi]$.

   ב. (10 נק') הוכיחו באינדוקציה כי אם $a_1\in[\pi k,\pi k+\pi]$ אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n\in[\pi k,\pi k+\pi]$.

   ג. (10 נק') הוכיחו כי הסדרה $a_n$ מתכנסת.

   ד. (6 נק') חשבו את גבול הסדרה אם נתון כי $a_1\in[0,\pi]$.