

פיסיקה למתמטיקאים

תנע קוי עם מסה משתנה

1. חללית משוגרת מכדור הארץ ב $t = 0$. החללית פולטת דלק במהירות קבועה (ביחס לחללית) u ובקצב α . מסתה ההתחלתית m_0 .

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן v

מסת החללית נתונה ע"י $m = m_0 - \alpha t$. ברגע t התנע של החללית (כולל הדלק) mv . ברגע $t + dt$ מסתה $m + dm$ ומהירותה $v + dv$. מסת הדלק הנפלט $-dm$ ומהירותו $v - u$. השינוי בתנע שווה ל $Fdt = -mgdt$. אם כן

$$(1) \quad (m + dm)(v + dv) + (v - u)(-dm) - mv = -mgdt,$$

ובהנחת איברים מסדר שני נקבל

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha u}{m_0 - \alpha t} - g.$$

על כן

$$(3) \quad v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right) - gt$$

(ב) מצאו את מיקומה x

מאינטגרציה על (3) נקבל

$$(4) \quad x = u \left[\left(\frac{m_0}{\alpha} - t \right) \ln \left(1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right) + t \right] - \frac{1}{2} gt^2$$

(ג) מצאו תנאי על u כך שהחללית תמריא

נפתח את (3) לטור טיילור עבור זמנים $t \ll m_0/\alpha$ ונדרוש

$$u > m_0 g / \alpha, v = (u \alpha / m_0 - g) t + \mathcal{O}(\alpha t / m_0)^2 > 0$$

(ד) מהו u המינימלי כך שהחללית בורחת משדה הגרביטציה של כדור א"א
 אם נתון ש 90% ממסתה הינו דלק, $\alpha = 10^4 Kg/s$, $m_0 = 2 \times 10^6 Kg$,
 ורדיוס כדור א"א $R = 6.3 \times 10^6 m$.
 נניח כי ברגע הבריחה t_e החללית נמצאת בנקודה h כך ש $h \ll R$.
 משימור אנרגיה נקבל $mv_e^2/2 = mgR$ ולכן מהירות הבריחה היא
 $v_e = \sqrt{2gR}$. רגע הבריחה הינו $t_e = 0.9m_0/\alpha$. התנאי לבריחה נתון
 ע"י $v(t_e) \geq v_e$ ולכן מ (3) נקבל

$$(5) \quad u_{min} = (0.9m_0g/\alpha + \sqrt{2gR})/\ln 10 \simeq 20,360 Km/h.$$