פיסיקה למתמטיקאים

משפט נטר ופונקצית יעקבי

1. הכללה למשפט נטר אם $\mathcal{L}$ אינוריאנטית תחת טרנספורמציות $q_i \to q_i + \epsilon K_i$, ובנוסף ניתן לרשום $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + df_\epsilon/dt$, כאשר $f_\epsilon(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ פונקציה של הקורדינטות ונגזרותיהן, אזי

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} K_i + \left(\frac{df_\epsilon}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0}$$

גודל נשמר

דוגמה נתון הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta x \dot{y}$$

.

(א) הראו כי $\mathcal{L}$ אינוריאנטי תחת סיבוב $x \to x + \epsilon y, y \to y - \epsilon x$ וכי ניתן לרשום $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + df_\epsilon/dt$

$$\mathcal{L} \to \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta(x + \epsilon y)(\dot{y} - \epsilon \dot{x}) = \mathcal{L} + \beta\epsilon(y\dot{y} - x\dot{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) =$$

$$= \mathcal{L} + \frac{d}{dt} \beta\epsilon(y^2 - x^2)/2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

(ב) מצאו גודל נשמר

$$Q = m\dot{x}y + (m\dot{y} + \beta x)(-x) + \beta(y^2 - x^2)/2 = m\dot{x}y - m\dot{y}x + \beta(y^2 - x^2)/2$$

2. חרוז בעל מסה m החפשי לנוע על חישוק עם רדיוס R המסתובב במהירות זויתית ω סביב ציר $\hat{z}$.

הלגראנג'יאן של החרוז הוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta,$$

ופונקצית יעקבי היא

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta,$$

ואילו האנרגיה היא

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta,$$

ושונה מ h. ברור כי $\mathcal{L}$ לא תלוי מפורשות בזמן ולכן h קבוע. מאחר ופועל כח חיצוני המבצע עבודה ע"י סיבוב החישוק במהירות ω, האנרגיה אינה קבועה והשינוי באנרגיה נתון ע"י

$$\frac{dE}{dt} = mR^2\omega^2\dot{\theta}\sin 2\theta.$$

3. חלקיק בעל מסה m נע במישור xy בהשפעת פוטנציאל הגרביטציה. ידוע כי ב $t=0$ החלקיק נמצא בראשית ומהירותו בכוון x

(א) רשמו את הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

(ב) רשמו את פונקציה יעקובי

$$h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

(ג) רשמו את האנרגיה והסיקו כי היא נשמרת

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = h$$

ומאחר ו $\mathcal{L}$ לא תלוי מפורשות בזמן מתקיים

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0.$$

(ד) כעת הניחו תנועה בהשפעת כח חיצוני $F=-mg$ ורשמו את $\mathcal{L}$, h ו E. הסבירו.

תאוצת הכובד היא $-g$ ולכן $\dot{y}=-gt$ ו $y=-\frac{1}{2}gt^2$. נקבל

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mg^2t^2$$

ו

$$h=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mg^2t^2.$$

האנרגיה, לעומת זאת נתונה (מדוע?) ע"י

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

כלומר $h\neq E$.

הלגראנג'יאן שרשמנו מתאר מערכת שאינה מבודדת (פועל עליה כח חיצוני) ולכן פונקצית יעקבי אינה שווה לאנרגיה ואינה נשמרת. האנרגיה של המערכת $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ כמובן נשמרת.