1. יהיו X,Y,Z קבוצות לא ריקות, ו $f:X\to Y, g:Y\to Z$ פונקציות. נסמן $h:=g\circ f$
הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א. אם $C\subseteq X$ ו- h חח"ע אזי $C=f^{-1}\left[f[C]\right]$.

ב. אם $\forall C\subseteq X: f[C]=h[C]$ אזי $f=h$.

ג. אם h על, ו- $C,D\subseteq Y$ אזי $g\left[C\cap D\right]=g[C]\cap g[D]$.

ד. אם $\forall C,D\subseteq Z: h^{-1}[C]=h^{-1}[D]\to C=D$ אזי g חח"ע.

.2

<u>עקרון המקסימום של האוסדורף</u>: תהי A קבוצה סדורה חלקית. נסמן ב X את אוסף השרשראות של A, אזי קיימת ב X שרשרת המקסימלית לפי יחס ההכלה.

א. נסח את הלמה של צורן
ב. הוכח שהלמה של צורן נובעת מעקרון המקסימום של האוסדורף.

.3

בחבילה יש 52 קלפים (13 סוגים, 4 צורות). בשאלה זו מספיק לרשום את הנוסחאות, אין צורך או טעם לחשב את המספרים הסופיים. (למשל $\binom{6}{2}(36!)^2 - 4\cdot5\cdot6$)

א. כמה אפשרויות יש לקבל חמישה קלפים מהקופה?

ב. כמה אפשרויות יש לקבל "בית מלא" (3 קלפים מאותו סוג וצורה שונה, ו2 מאותו סוג וצורה שונה – למשל 3 נסיכים ו2 רביעיות)

ג. בכמה דרכים ניתן לקבל חמישה קלפים כך שאין בהם זוג עוקב של קלפים מאותה צורה (למשל 1 ו2 תלתן, או 10 ונסיך לב)

4. יהי R יחס על הקבוצה $\mathbb{N}$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$xRy \Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{N}, x^m = y^n \ .$$

א. הוכח כי R יחס שקילות.

ב. זכרו כי מחלקת השקילות של x הינה קבוצת כל האיברים הנמצאים ביחס ל x.
מצאו את $[36]$.

ג. נגדיר את R באופן דומה עבור $x,y\in\mathbb{R}$. הוכח/הפרך: $\left|\mathbb{R}/R\right| > \aleph_0$.

.5

תהי A קבוצה אינסופית.

א. (2) נסמן $T=\{X\subseteq A : |X|=|A|\}$, כלומר קבוצת תתי הקבוצות של A מעוצמה $|A|$.
הוכיחו ש $|T|\le 2^{|A|}$.

א. (8) הוכיחו שקיימות $B,C\subseteq A$ כך ש $B\cup C=A$, $B\cap C=\phi$ ו $|B|=|C|=|A|$.
רמז : לכל עוצמה אינסופית a , מתקיים $a\cdot a=a$
ג.(4) נגדיר פונקציה $\{D\,|\,C\subseteq D\subseteq A\}$ $f:P(B)\to$ (B ו- C מסעיף א) ע"י
$f(X)=X\cup C$. הוכיחו ש f הפיכה.

ד. (2) הוכיחו שכל D כנ"ל היא מעוצמה $|A|$.

ה. (3) הוכיחו בעזרת סעיפים ג ו-ד ש $|T|\ge 2^{|A|}$.

ו. (1) הסיקו ש $|T|=2^{|A|}$.

.6

א. תהי U קבוצה, ותהיינה $S,T \subseteq U$, נגדיר פונקציה $g: P(U) \to P(U)$ ע"י $g(A) = T \cap (S \cup A)$ לכל $A \in P(U)$.

1. (4) הוכיחו $g = g^2$. ($g^2 = g \circ g$).

הוכח או הפרך:

2. (3) g חח"ע (לכל בחירה של $S,T \subseteq U$)
3. (3) g על. (לכל בחירה של $S,T \subseteq U$)

ב. (10) *נתונות פונקציות $g: X \to X$ $f: X \to X$. נתון ש: $f \circ g \circ f$ הפיכה. הוכיחו:*

1. f הפיכה.
2. g הפיכה. רמז: הציגו את g כמכפלה של פונקציות הפיכות.