פתרון מבחן מועד ב' – חדו"א לאודיסאה – 86147 – 12.4.26

המרצה: ארז שיינר משך המבחן: שלוש שעות משקל כל שאלה: 22 נק'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^9(3x)\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}{(1-\cos(7x))^5}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^9\cdot\left(\frac{(7x)^2}{1-\cos(7x)}\right)^5\cdot\frac{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}\cdot\frac{3^9}{7^{10}}=1\cdot 2^5\cdot(-5)\cdot\frac{3^9}{7^{10}}$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-5\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}{1}=-5$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(e^x)}}{x^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{e^x}}{x^x}=\{\text{אילן}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{e^x}}{e^{\ln(x^x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{e^x-xln(x)}=\lim_{x\to\infty}e^{e^x\left(1-\frac{xln(x)}{e^x}\right)}=\left\{e^{\infty(1-0)}\right\}=\infty$$

כאשר $\frac{xln(x)}{e^x}\to 0$ מסדרי גודל.

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}$

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\to\{1^0\}\to 1$$

2. חשבו את הביטויים הבאים:

א.

$$\int_0^{\pi}x\sin(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi}x\sin(x)\,dx=\begin{Bmatrix}f'=\sin(x) & g=x\\ f=-\cos(x) & g'=1\end{Bmatrix}=[-x\cos(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos(x)=$$

$$= -\pi\cos(\pi) + 0 \cdot \cos(0) + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$$

ב.

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(x) & g = \sin(x) \\ f = -\cos(x) & g' = \cos(x) \end{Bmatrix} = [-\sin(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\pi (1 - \sin^2(x))dx = \pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

נעביר אגף

$$2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

הערה: אפשר היה גם להשתמש בזהות:

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right)dx = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

3. נביט בסדרה המקיימת $a_1 = 0$ וכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$

א. הוכיחו כי הסדרה a_n עולה.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(1 - a_n)$$

אם נוכיח כי לכלn מתקיים כי $a_n < 1$ אז צד ימין חיובי ולכן הסדרה עולה.

נוכיח באינדוקציה. נתון כי $a_1 = 0 < 1$. יהי n כך ש $a_n < 1$ צ"ל כי $a_{n+1} < 1$

אכן

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}a_n < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

ב. חשבו את $\lim a_n$.

בסעיף א' הוכחנו כי הסדרה עולה, ואף הוכחנו כי היא חסומה מלמעלה ע"י 1.

לכן הסדרה מתכנסת לגבול סופי נסמנו $L = 1$.

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$$

ונקבל

$$L = L + \frac{1}{3}(1 - L)$$

ולכן $L = 1$, כלומר $a_n \to 1$

4. נביט בפונקציה $f(x) = \sqrt{e^{(x^2)} - 1}$

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$, ואת $\min\{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.

עבור $x \neq 0$ מדובר בהרכבה של פונקציות גזירות:

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{2\sqrt{e^{(x^2)} - 1}}$$

והפונקציה $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ כהרכבה של רציפות (כולל ב$x = 0$, שזה הדגש שלי במשפט הזה).

כיוון שבתחום $x > 0$ הנגזרת חיובית, הפונקציה עולה בתחום $[0, \infty)$

וכיוון שבתחום $x < 0$ הנגזרת שלילית, הפונקציה יורדת בתחום $(-\infty, 0]$

המינימום המוחלט שלה מתקבל בנקודה $x = 0$, ולכן

$$\min\{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = f(0) = 0$$

הערה: קל לראות כי $f(0) = 0$ ואילו הפונקציה היא אי שלילית ולכן זה המינימום, גם בלי תחומי עלייה וירידה.

ב. האם f גזירה בנק' $x = 0$? הוכיחו קביעתכם.

כיוון שבאפס אין מדובר בהרכבה של גזירות, אין מנוס מלבדוק לפי ההגדרה

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\cdot x^2}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{\underbrace{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\to 1}}\cdot\frac{|x|}{x}$$

לכן הגבול מימין הוא 1 כאשר $|x|=x$ ואילו הגבול משמאל הוא -1 כאשר $|x|=-x$.

סה"כ גבול שיפועי המיתרים לא קיים בנקודה ולכן הפונקציה אינה גזירה.

5. תהי פונקציה f הגזירה בנק' x_0.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f(2x-x_0)-f(x_0)}=\frac{1}{2}$.

הפרכה:

עבור הפונקציה הקבועה, הביטוי השמאלי בכלל אינו מוגדר, ובוודאי אינו שואף לחצי.

עוד דוגמא: עבור $f(x)=x^2$ בנקודה $x_0=0$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{(2x)^2-0}=\frac{1}{4}$$

ב. נניח בנוסף כי $f'(x_0)\neq 0$ וכן f' רציפה בx_0.

הוכיחו כי $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f(2x-x_0)-f(x_0)}=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{f(2x-x_0)-f(x_0)}\overset{WIN}{=}\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\cdot\frac{x-x_0}{f(2x-x_0)-f(x_0)}$$

כיוון ש f גזירה בx_0 היא רציפה בx_0 ולכן

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(2x-x_0)-f(x_0)}=\left\{\frac{0}{f(x_0)-f(x_0)}=\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2f'(2x-x_0)}$$

כיוון ש f' רציפה בx_0 הגבול האחרון שווה ל

$$\frac{1}{2f'(x_0)}$$

סה"כ הגבול המקורי הוא

$$\frac{f'(x_0)}{2f'(x_0)}$$

וזה מותר כי $f'(x_0) \neq 0$ ולכן לא מדובר בגבול בעייתי.

סה"כ הגבול הוא חצי.