

תרגיל 2 בפונקציות מרוכבות

1. עבור הפונקציות הבאות קבעו אם קיים גבול בנקודה $z = 0$ ומצאו אותו אם הוא קיים:

$$\frac{\bar{z}}{z} - \frac{z}{\bar{z}} \quad (\text{א})$$

$$\frac{z \operatorname{Re}(z)}{\bar{z}} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\bar{z}} \quad (\text{ג})$$

2. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות:

$$f(z) = x^3 + iy^3 \quad (\text{א})$$

$$f(z) = z + \operatorname{Re}(z) \quad (\text{ב})$$

$$f(z) = x^3 + y^5 \quad (\text{ג})$$

3. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

4. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
רמז: אם $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ אפשר לנסות לחפש u, v מהצורה

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$$

5. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב \mathbb{C} המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי קבועה f .

$$g(z) = (f(z))^2$$

6. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם.