

112-89 אלגברה ליניארית
 סמסטר א', תשס"ז—מועד ב'
 22.03.07

לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה בפתרון. יש לנמק כל חישוב נדרש.
 חומר עזר אינו מותר. משך הבחינה 2.5 שעות. בהצלחה!!

חלק א'

ערך כל סעיף כמסומן.

1. [15] תהי A המטריצה הבאה מעל \mathbb{R} :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(א) מצא/י בסיס למרחב האפס $N(A)$ של A .

(ב) מצא/י את הפתרון הכללי למערכת $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(ג) מצא/י בסיס למרחב שורות של A .

2. [10] תהי $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(א) בדוק ש: $A^2 - 2A + I = 0$.

(ב) **בשימוש** א מצא/י את A^{-1} .

3. [15] נתונה מערכת משוואות $Ax = b$ כאשר A היא מטריצה $m \times n$ מעל שדה F .
 עגל "נכון" אם הטענה היא נכונה, ו- "לא נכון" אם הטענה היא איננה נכונה.
 (א) אם $\text{rank } A = n$ ו- $n < m$ אז תמיד יש פתרון יחיד למערכת. נכון / לא נכון.
 (ב) אם v_1, v_2, v_3 הם פתרונות של המערכת אזי $3v_1 - 4v_2 + 2v_3$ הוא פתרון של המערכת אם ורק אם $b = 0$. נכון / לא נכון.
 (ג) הפיכה אם ורק אם A^{-1} הפיכה.

4. [10] יהי V מרחב הפולינומים ב x מעל \mathbb{R} ממעלה לכל היותר 4.

$$U = \{a + bx + (a + b)x^2 : a, b \in \mathbb{R}\}, W = \{ax + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

(א) _____ = $\dim(U + W)$

(ב) _____ = $\dim(U \cap W)$

$$5. [10] \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -6i \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$$

- (א) כתוב את A כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות.
 (ב) מצא/י בסיס למרחב האפס $N(A)$.

חלק ב

ערך כל שאלה 20 נקודות.

1. יהי מרחב ווקטורי מעל C . יהי $\{v_1, K, v_n\}$ בסיס ל V . הוא גם מרחב ווקטורי מעל R . הוכח/י ש $\{v_1, K, v_n, iv_1, K, iv_n\}$ הוא בסיס של V כמרחב ווקטורי מעל R .

2. תהי $A \in F^{m \times n}$. יהי $b \in F^m$. תהי A' המטריצה המורחבת של המערכת $Ax = b$ המתקבלת מ- A ע"י הוספת b כעמודה נוספת ל- A —כך ש A היא $m \times (n+1)$. הוכח כי קיים פתרון למערכת $Ax = b$ אם ורק אם $\text{rank}(A') = \text{rank}(A)$. במילים: קיים פתרון למערכת אם ורק אם דרגת המטריצה המורחבת שווה לדרגת מטריצת המקדמים.