מבחן מועד ג' – חדו"א 2 להנדסה- 83-114 – 08/11/26

מרצים: דר' יונתן בק, דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 22 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1.

א. חשבו את סכום הטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)2^n}$$

ב. קבעו האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$. נמקו.

2. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית. נניח כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים

$u_x(t,2t) + 2u_y(t,2t) = 2t$.

נגדיר $g(x) = u(u(x,2x),2u(x,2x))$.

א. הוכיחו כי $g'(x) = 4x\, u(x,2x)$.

ב. הוכיחו כי קיים קבוע $C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$g(x) = (x^2 + C)^2 + C$.

רמז: הראו כי $g(x) = h(h(x))$ עבור פונקציה מתאימה.

3. נועה מטיילת לאורך האליפסה $x^2 + 4y^2 = 8$. בכל נקודה (x,y) עוצמת האות במכשיר שברשותה נתונה על ידי הפונקציה $f(x,y) = xy + 5$.

א. מצאו את עוצמת האות המקסימלית ואת עוצמת האות המינימלית שנועה מודדת, ואת כל הנקודות שבהן הן מתקבלות.

ב. מצאו את משוואת הישר המשיק למסלול הטיול של נועה בנקודה $(2,1)$.

4. דניאל הכין עוגה שבסיסה הוא $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ וגובהה מעל הבסיס נתון על ידי הפונקציה $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$.

רמז: ניתן להיעזר בקואורדינטות גליליות.

א. חשבו את נפח העוגה.

ב. חשבו את מסת העוגה, אם פונקציית הצפיפות שלה היא $\rho(x,y,z) = 1 + z$.

5. נסמן את מעטפת העוגה משאלה 4 (תקרה, קירות ורצפה) ב־M. שדה זרימת החום נתון על ידי $F(x,y,z) = (xz, yz, z^2)$.

חשבו את השטף דרך מעטפת העוגה בכיוון הנורמל החוצה, כלומר את האינטגרל המשטחי מסוג שני

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

רמז: ניתן להיעזר בקואורדינטות גליליות.

טורי טיילור

מקדמי טיילור וטורים ידועים

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad \sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

גזירות בשני משתנים

דיפרנציאביליות

הפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)}\frac{f(x+a,y+b)-f(x,y)}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{f_x(x,y)\cdot a+f_y(x,y)\cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

משוואת מישור משיק

נוסחא כללית לחישוב מישור משיק לפונקציה הגזירה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0,z_0) כאשר $z_0=f(x_0,y_0)$

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

גרדיאנט ונגזרת כיוונית

הגרדיאנט של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) הוא

$$\nabla f(x_0,y_0)=\Big(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\Big)$$

נגזרת הכיוונית של הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) בכיוון $\vec{v}$ היא

$$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

כלל השרשרת

תהי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ותהיינה $x(t),y(t)$ גזירות. נביט בפונקציה המורכבת $h(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$ אזי

$$h'(t)=f_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+f_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)$$

קיצון מקומי ומוחלט

נקודות חשודות (קריטיות) לקיצון מקומי

נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$\nabla f(x,y)=\big(f_x,f_y\big)=(0,0)$$

מבחן הנגזרת השנייה

לכל נקודה חשודה נבצע את התהליך הבא:

1. נחשב את $\Delta(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-f_{xy}^2(x,y)$

2. אם $\Delta(x,y) < 0$ מדובר בנקודת אוכף, כלומר נקודה חשודה שאינה קיצון מקומי

3. אם $\Delta(x,y) > 0$ מדובר בקיצון מקומי

א. אם $f_{xx}(x,y) > 0$ מדובר במינימום מקומי

ב. אם $f_{xx}(x,y) < 0$ מדובר במקסימום מקומי

מציאת קיצון מוחלט

בהנתן פונקציה $f(x,y)$ ותחום D נרצה למצוא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של $f(x,y)$ כאשר $(x,y) \in D$.

1. נאסוף נקודות חשודות מפנים התחום, אלה נקודות בתחום בהן הגרדיאנט מתאפס.

2. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום באמצעות כופלי לגראנז':

א. נתאר את שפת התחום D ע"י המשוואה $g(x,y) = 0$

ב. נפתור את מערכת המשוואות בשלושת הנעלמים (x,y,λ)

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ג. לכל פתרון (x,y,λ) הנקודה (x,y) היא נקודה חשודה על הקצה

3. נאסוף נקודות חשודות משפת התחום עבורן $g(x,y) = 0$ וכן $\nabla g(x,y) = (0,0)$.

4. נציב את כל הנקודות החשודות משני הסעיפים הקודמים בפונקציה, ונראה מה הכי גבוה ומה הכי נמוך.

אינטגרלים במישור ובמרחב

אינטגרלים כפולים

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על D כרצפה, ועל f כגובה התקרה, והאינטגרל $\iint_D f dxdy$ מייצג את נפח הבית.

כמו כן, אפשר לחשוב על D כמשטח, ועל f כצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של המשטח.

בנוסף, $\iint_D 1 dxdy$ הוא השטח של התחום D.

חישוב אינטגרלים כפולים

אם

$$D = \{(x,y) | a \le x \le b, h_1(x) \le y \le h_2(x)\}$$

אזי

$$\iint_D f dxdy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

שינוי קואורדינטות על אינטגרלים כפולים

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right|$$

$$(x,y) \in D \qquad (u,v) \in D'$$

אזי

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\cdot |J|dudv$$

קואורדינטות קוטביות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$(x,y) \in D \qquad (r,\theta) \in D'$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f\big(rcos(\theta),rsin(\theta)\big)rdrd\theta$$

אינטגרלים משולשים

יהי תחום $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על V כאובייקט תלת מימדי, ועל f כצפיפות בכל נקודה, והאינטגרל $\iiint_V f dxdydz$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iiint_V 1dxdydz$ הוא הנפח של התחום V.

חישוב אינטגרלים משולשים

אם

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

וכן

$$V = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

אזי

$$\iiint_V f dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dxdy$$

שינוי קואורדינטות

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(u,v,w)$$
$$z = z(u,v,w)$$

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}\right|$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (u,v,w) \in V'$$

אזי

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|dudvdw$$

קואורדינטות גליליות

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsin(\theta)$$
$$z = z$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,z) \in V'$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z) \cdot rdrd\theta dz$$

קואורדינטות כדוריות

$$x = rsin(\theta)\cos(\phi)$$
$$y = rsin(\theta)\sin(\phi)$$
$$z = rcos(\theta)$$

$$|J| = r^2\sin(\theta)$$

$$(x,y,z) \in V \qquad (r,\theta,\phi) \in V'$$

$$\iiint_V f dxdydz = \iiint_{V'} f\big(r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), rcos(\theta)\big) \cdot r^2\sin(\theta)\, drd\theta d\phi$$

אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במישור

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור שפה על הרצפה, ועל f כגובה הקירות, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את שטח הקירות.

כמו כן, אפשר לחשוב על C בתור חבל על הרצפה, ועל f כצפיפות החבל בכל נקודה, ואז האינטגרל מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, $\int_C 1dr$ הוא אורך המסילה.

חישוב אינטגרלים קווים מסוג ראשון במישור

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$t \in [a,b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt$$

אינטרגלים קוויים מסוג ראשון במרחב

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על C בתור חבל במרחב ועל f בתור הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\int_C f dr$ מייצג את המסה של החבל.

בנוסף, האינטגרל $\int_C 1dr$ הוא האורך של המסילה.

חישוב אינטגרלים קוויים מסוג ראשון במרחב

יהי ייצוג פרמטרי של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$
$$t \in [a, b]$$

אזי

$$\int_C f dr = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt$$

<u>אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול על הרצפה, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, ואז $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה שנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

<u>חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במישור</u>

תהי פרמטריזציה של C

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$
$$t \in [a, b]$$
$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big) dt$$

<u>אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב</u>

תהי מסילה $C \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

אפשר לחשוב על C בתור מסלול במרחב, ועל $\vec{F}$ בתור שקול הכוחות בכל נקודה, אז האינטגרל $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ מייצג את העבודה הנעשית על חלקיק שנע לאורך המסלול.

<u>חישוב אינטגרלים קוויים מסוג שני במרחב</u>

תהי פרמטריזציה של המסילה

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$
$$t \in [a, b]$$
$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(r(t)\big) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) dt$$

<u>סימון נוסף לאינטגרלים קוויים מסוג שני</u>

$$\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$$

והפרמטריזציה של המסילה היא

$$\vec{r} = \big(x(t), y(t)\big)$$

אזי נסמן

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy$$

כאשר

$$\int_C Pdx = \int_a^b P\big(\vec{r}(t)\big) \cdot x'(t)dt$$

$$\int_C Qdy = \int_a^b Q\big(\vec{r}(t)\big) \cdot y'(t)dt$$

<u>משפט גרין</u>

יהי תחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$ בעל השפה C ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בעל נגזרות רציפות

אזי האינטגרל הקווי מסוג שני של $\vec{F}$ מסביב לC נגד כיוון השעון שווה לאינטגרל הכפול של $curl\big(\vec{F}\big)$ על התחום D.

נסמן

$$\vec{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

אזי

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_D curl\big(\vec{F}\big)dxdy = \iint_D \big(Q_x - P_y\big)dxdy$$

<u>אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון</u>

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

אפשר לחשוב על M כאובייקט משטחי ועל f כפונקצית הצפיפות בכל נקודה, ואז האינטגרל $\iint_M fdS$ מייצג את המסה של האובייקט.

בנוסף, $\iint_M 1dS$ מייצג את שטח הפנים של המשטח.

<u>חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג ראשון</u>

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M fdS = \iint_D f\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot |\vec{s}_u \times \vec{s}_v|dudv$$

<u>אינטגרלים משטחיים מסוג שני</u>

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ויהי שדה וקטורי $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ויהי כיוון לנורמל למשטח.

אפשר לחשוב על המשטח בתור ממברנה ועל השדה הוקטורי בתור עוצמת הזרימה, אז האינטגרל $\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n}dS$ הוא סך כל הזרימה דרך הממברנה בכיוון הנורמל הנתון.

חישוב אינטגרלים משטחיים מסוג שני

תהי פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{s}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$(u,v) \in D$$

אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \pm \iint_D \vec{F}\big(\vec{s}(u,v)\big) \cdot (\vec{s}_u \times \vec{s}_v) du dv$$

כאשר הסימן נקבע על ידי בחירת וקטור הנורמל $\vec{s}_u \times \vec{s}_v$ בכיוון הנתון.

משפט גאוס (דיברגנץ)

יהי גוף תלת מימדי $V \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל משטח מעטפת M ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, ונביט בנורמל כלפי חוץ הגוף, אזי

$$\iint_M \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V div\big(\vec{F}\big) dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

משפט סטוקס

יהי משטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל שפה C ויהי שדה וקטורי בעל נגזרות רציפות $\vec{F}$, אזי האינטגרל הקווי נגד כיוון השעון כאשר הלמעלה הוא לפי הנורמל למשטח מקיים:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_M rot\big(\vec{F}\big) \cdot \hat{n} dS = \iint_M \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$