

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 5: אנליטיות. פונקציות הרמוניות

1. נתונה הפונקציה $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$.

(א) הראו כי f אינה אנליטית באף נקודה

נראה כי $v = x^2 + y^2$ אינה הרמונית באף נקודה.

$$\text{אכן } v_{xx} + v_{yy} = 2 + 2 \neq 0$$

(ב) הראו כי f גזירה בראשית

נבדוק קיום של $C.R$ בראשית

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad v_x = 2x, \quad v_y = 2y$$

$$\text{ולכן } u_x(0,0) = -v_x(0,0) = 0 \quad \vee \quad u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$$

(ג) הראו מפורשות כי f אינה גזירה באף נקודה $z \neq 0$

נרשום $f(z) = \Re(z)\Im(z) + i|z|^2$ ונראה לפי הגדרת הגבול כי $f'(z)$ לא קיימת לכל $z \neq 0$. נתבונן בגבול

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Re(z + \Delta z)\Im(z + \Delta z) + i|z + \Delta z|^2 - \Re(z)\Im(z) - i|z|^2}{\Delta z}$$

ניקח $\Delta y = 0$ ונרשום את הגבול המתאים עבור החלק המדומה

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\bar{z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{\Delta z} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\bar{z} + z \frac{\Delta x}{\Delta x} + \Delta x \right) = \bar{z} + z = 2\Re(z)$$

כעת ניקח $\Delta x = 0$ ונקבל

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z|^2 - i|z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\bar{z} + z \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} - i\Delta y \right) = \bar{z} - z = -2i\Im(z)$$

נשים לב כי למרות ש f גזירה בראשית, היא אינה גזירה באף סביבה של הראשית ולכן אינה אנליטית גם שם