תרגיל

הוכיחו שלכל $a\in S^1$ מתקיים $S^1\backslash\{a\}\cong\mathbb{R}$
(כלומר מעגל שהסירו ממנו נקודה הומיאומורפי למישור)

פתרון

נגדיר $f:S^1\backslash\{(0,1)\}\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(a,b)=\dfrac{a}{1-b}$.
הפונקציה ההופכית היא $g:\mathbb{R}\to S^1\backslash\{(0,1)\}$ המוגדרת ע"י $g(x)=\left(\dfrac{2x}{x^2+1},\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
f,g רציפות ולכן $S^1\backslash\{a\}\cong\mathbb{R}$

משפט

יהי X מ"ט, $A,B\subseteq X$ תתי מרחבים קשירים מסילתית. נניח ש$A\cap B\neq\emptyset$, אזי $A\cup B$ קשיר מסילתית.

הוכחה

יהיו $a,b\in A\cup B$. נחלק למקרים:

1. $a,b\in A$. A קשיר מסילתית ולכן קיימת $\gamma:[0,1]\to A$ כך ש $\begin{matrix}\gamma(0)=a\\ \gamma(1)=b\end{matrix}$ <u>רציפה</u>.

   $i:A\to A\cup B$ - העתקת ההכלה היא <u>רציפה</u>.

   $i\circ\gamma:[0,1]\to A\cup B$ רציפה(כהרכבת רציפות) ומתקיים

   $$(i\circ\gamma)(0)=a\qquad(i\circ\gamma)(1)=b$$

2. $a,b\in B$. דומה ל1.

3.

$$a\in A\backslash B\wedge b\in B\backslash A$$

$$\epsilon c\in A\cap B\neq\emptyset$$

$$a,c\in A$$

ע"פ מקרה 1 קיימת מסילה <u>רציפה</u> $\gamma_1:[0,1]\to A\cup B$ כך ש $\begin{matrix}\gamma_1(0)=a\\ \gamma_1(1)=c\end{matrix}$.

שוב, ע"פ מקרה 2 קיימת מסילה <u>רציפה</u> $\gamma_2:[0,1]\to A\cup B$ כך ש $\begin{matrix}\gamma_2(0)=c\\ \gamma_2(1)=b\end{matrix}$.

ניתן לשרשר את שתי המסילות ולקבל מסילה רציפה γ:

$$\gamma\left(t\right)=\begin{cases}\gamma_{1}\left(2t\right) & 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ \gamma_{2}\left(2t-1\right) & \frac{1}{2}\leq t\leq1\end{cases}$$

מתקיים: $\gamma\left(0\right)=a,\gamma\left(1\right)=b$

תרגיל/מסקנה

הוכיחו שלכל $n\leq1$, S^{n} קשיר מסילתית.

תזכורת: $S^{n}:=\left\{ \left(x_{1},\ldots x_{n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\sum_{i=1}^{n+1}x_{i}^{2}=1\right\}$

הערה: ניתן להוכיח ש$\forall_{a\in S^{n}}S^{n}\backslash\left\{ a\right\} \cong\mathbb{R}^{n}$

פתרון

יהיו $a\neq b\in S^{n}$. הוכחנו כבר ש $\begin{array}{c}S^{n}\backslash\left\{ a\right\} \cong\mathbb{R}^{n}\\ S^{n}\backslash\left\{ b\right\} \cong\mathbb{R}^{n}\end{array}$.
$\mathbb{R}^{n}$ קשיר מסילתית כמרחב נורמי קמור ולכן $S^{n}\backslash\left\{ a\right\} ,S^{n}\backslash\left\{ b\right\}$ קשירים מסילתית.

$$\left(S^{n}\backslash\left\{ a\right\} \right)\cap\left(S^{n}\backslash\left\{ b\right\} \right)\neq\emptyset$$

וכן

$$\left(S^{n}\backslash\left\{ a\right\} \right)\cup\left(S^{n}\backslash\left\{ b\right\} \right)=S^{n}$$

לכן מהמשפט הקודם S^{n} קשיר מסילתית.

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

א. $\left[3,\infty\right)\cong\left(-\infty,5\right]$

ב. $S^{1}\cong S^{n}$ עבור $n>1$

ג. $S^{1}\cong Z$ כאשר

$$S^{1}=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}\middle|x^{2}+y^{2}=1\right\}$$

$$Z=S^{1}\cup\left\{ \left(x,y\right)\middle|\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}+y^{2}=1\right\}$$

פתרון

א. נמצא את ההומיאומורפיזם המפורש.

$f:[3,\infty)\to(-\infty,5]$ המוגדרת ע"י $f(x)=-x+8$ ־ רציפה, הפיכה, וההופכית גם כן רציפה $g(x)=-x+8$.

ב. נניח בשלילה ש$S^1\cong S^n$ עבור $n>1$. אזי קיים $f:S^1\to S^n$ הומיאומורפיזם. תהי $a\in S^1$.

$$f|_{(S^1\setminus\{a\})}:S^1\setminus\{a\}\to S^n\setminus\{r(a)\}$$

אבל $\begin{matrix}\mathbb{R}\cong S^1\setminus\{a\}\\ \mathbb{R}^n\cong S^n\setminus\{a\}\end{matrix}$ $\Leftarrow$ $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}$ עבור $n>1$. אבל $\mathbb{R}^n$ לא הומיאומורפי ל$\mathbb{R}$ עבור $n>1$(תוכיחו בש"ב).

ג. נניח בשלילה ששני המרחבים הומיאומורפים. לכן קיים $f:Z\to S^1$ הומיאומורפיזם.

נתבונן בשתי נקודות בZ: $a=(-1,0)\,,b=(2.5,0)$. $Z\setminus\{(-1,0),(2.5,0)\}$ הוא מרחב קשיר.

הסבר לקשירות:

- מעגל ימני פחות נקודה$\cong\mathbb{R}$ ולכן קשיר.
- מעגל שמאלי פתוח נקודה $\cong\mathbb{R}$ ולכן קשיר.

$A\cap B\neq\emptyset$, $A\cup B=Z\setminus\{a,b\}$ ולכן $Z\setminus\{a,b\}$ קשיר. גם הוא הומיאומורפי(צמצום סימולטני של התחום והטווח). $Z\setminus\{a,b\}$ קשיר ולכן $S^1\setminus\{f(a),f(b)\}$ קשיר, אבל לכל $r\in\mathbb{R}$, $\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{r\}}_{\text{not connected}}\cong S^1\setminus\{f(a),f(b)\}$ ־ וקיבלנו סתירה.

תרגיל

תהי $f:X\to Y$ רציפה, $A\subseteq X$. הוכיחו:

א. $f(\mathrm{cl}(A))\subseteq\mathrm{cl}(f(A))$

ב. נניח שf הומיאומורפיזם. הוכיחו ש$f(\mathrm{cl}(A))=\mathrm{cl}(f(A))$.

תזכורת:
- $ff^{-1}(A)\subseteq A$
- $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

פתרון

א. נוכיח ש

$$(*)\qquad \mathrm{cl}(A)\subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))$$

כי אז ע"פ התזכורת נקבל

$$f(\mathrm{cl}(A))\subseteq f\left(f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))\right)\subseteq\mathrm{cl}(f(A))$$

כדי להוכיח את $(*)$ מספיק להוכיח $A\subseteq\underbrace{f^{-1}(\mathrm{cl}(f(A)))}_{\text{closed}}$:

סגורה: $\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)$ סגורה. f רציפה ולכן $f^{-1}\left(\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)\right)$ סגורה.

הכלה: $f\left(A\right)\subseteq\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)$. נפעיל f^{-1} על שני האגפים:

$$A\subseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)\right)$$

ב. f הומיאומורפיזם ובפרט סגורה. מספיק להוכיח(אחרי סעיף א') $\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)\subseteq f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)$. מספיק להוכיח ש$\underbrace{f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)}_{\text{closed}}\supseteq f\left(A\right)$:

סגורה: $\mathrm{cl}\left(A\right)$ סגורה, f סגורה ולכן $f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)$ סגורה.

הכלה: $f\left(A\right)\subseteq f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)\Leftarrow f\left(A\right)\subseteq f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)$.

מסקנה

תהי $f:X\to Y$ רציפה ועל ותהי $A\subseteq X$ צפופה.
אזי $f\left(A\right)$ צפופה בY.

הוכחה

$$Y=f\left(x\right)=f\left(\mathrm{cl}\left(A\right)\right)\subseteq\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)$$

ברור ש$\mathrm{cl}\left(f\left(A\right)\right)\subseteq Y$, ולכן $\mathrm{cl}\ f\left(A\right)=Y$.

טענה

יהי $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם, אזי f מעביר מרכיב קשירות של X למרכיב קשירות של Y.

הוכחה

יהי $C\subseteq X$ מרכיב קשירות. בפרט C קשיר.
f הומיאומורפיזם ולכן $f\left(C\right)$ תת מרחב קשיר. נראה ש$f\left(C\right)$ קשיר מסקימלית ונסיק שהוא מרכיב קשירות.
נניח בשלילה שקיים $\underbrace{D}_{\text{connected}}\supsetneqq f\left(C\right)$. אזי $C\subsetneqq f^{-1}\left(D\right)$. כמו כן $f^{-1}\left(D\right)$ קשיר, שכן D קשיר וf^{-1} רציפה. קיבלנו סתירה לכך שC קשיר מסילתית.

הערה

אם f הומיאומורפיזם אז הוא חח"ע ולכן לא ייתכן שהוא מעביר שני מרכיבי קשירות לאותו מרכיב קשירות. מכאן הומיאומורפיזם שומר על מספר מרכיבי הקשירות.

תרגיל

נתבונן בגרף של הפונקציה $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$. מצא את מרכיבי הקשירות ואת מרכיבי הקשירות המסילתית.

פתרון

f ודאי רציפה. ע"פ מה שהראינו בתרגיל הקודם $\mathrm{Gr}_f\cong\mathbb{R}-\{0\}$. ב$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ יש שני מרכיבי קשירות - $(0,\infty)$ ו$(-\infty,0)$ - שכן $(0,\infty),(-\infty,0)$ קשירים מקסימלית(תתי המרחבים של $\mathbb{R}$ הקשירים הם קטעים בלבד).

כמו כן הוכחנו בהרצאה שאם $A\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אז מרכיבי הקשירות של A מתלכדים עם מרכיבי הקשירות המסילתית. לכן שני ענפי ההיפרבולה הם מרכיבי הקשירות וגם מרכיבי הקשירות המסילתית.

הגדרה

מ"ט X נקרא <u>האוסדורף</u> אם לכל $x\neq y\in X$ קיימות U,V סביבות של x,y בהתאמה כך ש$U\cap V=\emptyset$(נקרא גם מרחב T_2)

תרגיל

תהיינה $f,g:X\to Y$ רציפות, Y האוסדורף, X, $A\subseteq X$ צפופה ו$f(a)=g(a)$ לכל $a\in A$.
הוכיחו ש$f=g$.

הוכחה

נניח שבלילה שקיים $x\in X$ כך ש$f(x)\neq g(x)$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות של $f(x),g(x)$ בהתאמה כך ש$U\cap V=\emptyset$. $f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ סביבה של x ובפרט פתוחה$\neq\emptyset$.

A צפופה $\Leftarrow$ $\exists a\in A\cap\left(f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\right)\neq 0$

$a\in A$ $\Leftarrow$ $\underbrace{f(A)}_{\in U}=\underbrace{g(A)}_{\in V}$ ולכן $f(a)=g(a)\in U\cap V$

בסתירה לכך ש$U\cap V=\emptyset$.

מסקנה

אם $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות ומתלכדות על הרציונליים אזי $\forall_{x\in\mathbb{R}}f(x)=g(x)$

הסבר

מתקיימים תנאי המשפט הקודם שכן $\mathbb{Q}$ צפופה ב$\mathbb{R}$, וגם $\mathbb{R}$ האוסדורף.