לינארית 2 תשפ"ד אביב מועד ג

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.
מתרגלים: עידו גולדנברג, עידו פלדמן.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 108 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. (15 נק) יהיו V,W ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו B,B' בסיסים או"נ סדורים ל V,W (בהתאמה). תהי $T:V\longrightarrow W$ העתקה לינארית.הוכיחו

$$[T^*]_B^{B'}=([T]_{B'}^B)^*$$

2. נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(א) (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $[T]_B^B=D$.

(ב) (10 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

3. אין קשר בין בסעיפים הבאים:

(א) (12 נק) תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $tr(A)=0$, $rankA=2$, $A^2=-I$. מצאו את הפ"מ של A?

(ב) (12 נק) יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. ויהי $T:V\longrightarrow V$ אופרטור לינארי נורמלי המקיים $T^7=T^6$.
הוכיחו כי T צל"ע.

4. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)

(א) קיימת מטריצה $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת $A^3=J_3(0)$.

(ב) יהי Vממ"פ מימד n, ויהיו U,W ת"מ. אזי $U^\perp\cup W^\perp=(U\cap W)^\perp$

(ג) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $m_A(\lambda)=\lambda^3-\lambda$. אזי, הפ"מ של A^2 הוא $\lambda^2-\lambda$.

5. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה.

(א) (12 נק) הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים חיוביים (כלומר הם $0 <$).

(ב) (10 נק) נניח AA^* אלכסונית. הוכיחו כי קיימות מטריצה $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ צל"ע, ומטריצה $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית כך ש

$$A = UP$$

(ג) (10 נק) הוכיחו כי קיימות מטריצה $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ צל"ע, ומטריצה $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית כך ש

$$A = UP$$

(כלומר, אכן זו אותה השאלה כמו סעיף קודם. רק כעת אין את ההנחה ש AA^* אלכסונית).

בהצלחה!!

<u>שאלה 1:</u>(15 נק) יהיו V,W ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו B,B' בסיסים או"נ סדורים ל V,W (בהתאמה). תהי $T:V\longrightarrow W$ העתקה לינארית.הוכיחו

$$[T^*]_B^{B'}=([T]_{B'}^B)^*$$

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2</u>: נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1. (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ כך ש $[T]_B^B=D$.
2. (10 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

שאלה 3: אין קשר בין בסעיפים הבאים:

1. (12 נק) תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ המקיימת $tr(A) = 0$, $rankA = 2$, $A^2 = -I$. מצאו את הפ"מ של A?

2. (12 נק) יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. ויהי $T : V \longrightarrow V$ אופרטור לינארי נורמלי המקיים $T^7 = T^6$. הוכיחו כי T צל"ע.

פתרון:

פתרון שאלה 3 (המשך)

<u>פתרון שאלה 3 (המשך)</u>

פתרון שאלה 3 (המשך)

שאלה 4: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לסעיף)

1. קיימת מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ המקיימת $A^3 = J_3(0)$.
2. יהי V ממ"פ מימד n, ויהיו U,W ת"מ. אזי $(U\cap W)^\perp = U^\perp \cup W^\perp$
3. תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $m_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$. אזי, הפ"מ של A^2 הוא $\lambda^2 - \lambda$.

פתרון שאלה 4:

<u>פתרון שאלה 4 (המשך)</u>

פתרון שאלה 4 (המשך)

שאלה 5: תהי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה.

1. (12 נק) הוכיחו כי כל הע"ע של A^*A הם ממשיים חיוביים (כלומר הם $0 <$).
2. (10 נק) נניח AA^* אלכסונית. הוכיחו כי קיימות מטריצה $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ צל"ע, ומטריצה $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית כך ש
$$A = UP$$
3. (10 נק) הוכיחו כי קיימות מטריצה $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ צל"ע, ומטריצה $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ אוניטרית כך ש
$$A = UP$$
(כלומר, אכן זו אותה השאלה כמו סעיף קודם. רק כעת אין את ההנחה ש AA^* אלכסונית).

פתרון:

פתרון שאלה 5 (המשך)

<u>פתרון שאלה 5 (המשך)</u>

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___