בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ד, מועד ב' -פתרון

19.9.2024, ט"ז באלול התשפ"ד

מרצים: אחיה בר-און, שמעון ברוקס, דורון פרלמן, ארז שיינר.

מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, רועי רונן.

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהא U קבוצה ותהיינה $A,B,C\subseteq U$. לכל תת קבוצה $X\subseteq U$ נסמן את המשלים $X^c=U\backslash X$. בנוסף, לכל שתי קבוצות S_1,S_2 נסמן את ההפרש הסימטרי $S_1\triangle S_2$ להיות הקבוצה $S_1\triangle S_2=(S_1\backslash S_2)\cup(S_2\backslash S_1)$.
הוכיחו או הפריכו את הבאים:

(א) $P(A)\triangle P(B)\subseteq P(A\triangle B)$.

פתרון: הפרכה: ניקח $B=\{2\}$ $A=\{1,2\}$. מתקיים כי

$$P(A)\triangle P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},A\}\triangle\{\emptyset,\{2\}\}=\{\{1\},A\}$$

ואילו

$$P(A\triangle B)=P(\{1\})=\{\emptyset,\{1\}\}$$

ולא מתקיימת ההכלה שבתרגיל.

(ב) $P(A^c)\cap P(A)=\{\emptyset\}$.

פתרון: הוכחה: קבוצה ריקה שייכת בכל קבוצת חזקה ולכן $\emptyset\in P(A),P(A^c)$ ולכן גם בחיתוך

$$\emptyset\in P(A^c)\cap P(A)$$

ונראה כי אין קבוצה אחרת שנמצאת בחיתוך. תהא $B\in P(A^c)\cap P(A)$ צ"ל $B=\emptyset$. מהגדרת חיתוך וקבוצת חזקה נסיק כי

$$B\subseteq A^c,\ \ B\subseteq A$$

ולכן $B\subseteq A^c\cap A$. כיוון ש $A^c\cap A=\emptyset$ ו B מוכלת בה נסיק שגם $B=\emptyset$ כפי שרצינו.

(ג) אם $[(B\subseteq C\vee C\subseteq B)\wedge(B\subseteq A\vee A\subseteq B)]$ אז $(A\subseteq C\vee C\subseteq A)$.

פתרון: הפרכה:

$$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{2\}$$

אזי מתקיים כי $A,C\subseteq B$ ולכן

$$(B\subseteq A\vee A\subseteq B)$$

אמת וגם $(B \subseteq C \vee C \subseteq B)$ אמת ולכן כל ה"אם" (בסוגריים המרובעות) מתקיים. לעומת זאת

$$A \subseteq C \vee C \subseteq A$$

אינו מתקיים.

2. (13 נקודות) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת את הטענה הבאה: לכל n טבעי מתקיים כי $\frac{6^n-1}{5} \in \mathbb{Z}$.

פתרון:

- בסיס $n=1$: מתקיים כי $\frac{6^1-1}{5} = \frac{5}{5} = 1 \in \mathbb{Z}$.
- צעד - נניח שעבור n מסוים מתקיים כי $\frac{6^n-1}{5} \in \mathbb{Z}$ ונוכיח עבור $n+1$. כלומר נוכיח כי

$$\frac{6^{n+1}-1}{5} \in \mathbb{Z}$$

ואכן

$$6^{n+1}-1 = 6 \cdot 6^n - 1 = 5 \cdot 6^n + (6^n - 1)$$

ולכן, בשימוש הנחת האינדוקציה, נקבל

$$\frac{6^{n+1}-1}{5} = 6^n + \frac{6^n-1}{5}$$

ששניהם מספרים שלמים ולכן גם החיבור שלהם.

3. (8 נקודות כל סעיף) תהא X קבוצה לא ריקה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
(תזכורת: פונקציות מ X ל X ויחסים על X הם בפרט קבוצות. מכאן שניתן לעשות הפרש סימטרי בין שתי פונקציות/יחסים)

(א) לכל שתי יחסים סימטריים R, S על X מתקיים $R \triangle S$ יחס סימטרי על X.

פתרון: הוכחה: יהיו a, b ב X המקיימים $(a,b) \in R \triangle S$ צ"ל $(b,a) \in R \triangle S$. כיוון ש $(a,b) \in R \triangle S$ נקבל כי

$$[(a,b) \in R \backslash S] \vee [(a,b) \in S \backslash R]$$

ואז:

- אם $(a,b) \in R \backslash S$ אזי $(a,b) \in R$ וגם $(a,b) \notin S$. מכיוון ש R סימטרי ו $(a,b) \in R$ נקבל $(b,a) \in R$. כיוון

ש S סימטרי ו $(a,b) \notin S$ נקבל כי $(b,a) \notin S$ (אם $(b,a) \in S$ אז גם $(a,b) \in S$) ולכן $(b,a) \in R \backslash S$ ולכן $(b,a) \in R \triangle S$.

- אם $(a,b) \in S \backslash R$ נקבל כמו במקרה הקודם ש $(b,a) \in R \backslash S$ (הוכחה זהה ובלבד שתחליפו R ב S ו S ב R בכל מקום).

(ב) לכל שתי יחסים טרנזיטיביים R, S על X מתקיים $R \triangle S$ יחס טרנזיטיבי על X.

פתרון: הפרכה: נגדיר קבוצה

$$X = \{1,2,3\}$$

ונגדיר את היחסים

$$R = \{(1,2)\}, S = \{(2,3)\}$$

שהינם יחסים טרנזיטיביים על X. אבל

$$R \triangle S = \{(1,2), (2,3)\}$$

אינו יחס טרנזיטיבי על X.

(ג) לכל שתי פונקציות $f, g \in X^X$ מתקיים $f \triangle g \notin X^X$.

פתרון: הוכחה: יהיו $f, g \in X^X$ ונוכיח כי $f \triangle g \notin X^X$. כיוון ש X אינה ריקה, קיים a ב X. כעת:

- אם $f(a) = g(a)$ נקבל ש $f \triangle g$ אינו יחס שלם כי a אינו מתייחס לאף איבר. הוכחה: נב"ש קיים b ב X כך ש $(a,b) \in f \triangle g$ אזי $(a,b) \in f \backslash g$ או $(a,b) \in g \backslash f$. במקרה ש $(a,b) \in f \backslash g$ (המקרה השני דומה ונוותר על הכתיבה שלו) נסיק ש $(a,b) \notin g$, $(a,b) \in f$. כיוון ש $(a,b) \in f$ ו f חד-ערכי נסיק כי $b = f(a)$. כיוון ש $f(a) = f(a)$ נסיק כי $b = g(a)$ ומכאן ש $(a,b) \in g$ סתירה לכך ש $(a,b) \notin g$.
- אם $f(a) \neq g(a)$ נקבל שהיחס $f \triangle g$ אינו חד ערכי שהרי $(a, f(a)), (a, g(a)) \in f \triangle g$. הוכחה: כיוון ש $(a, f(a)) \in f$ לפי הגדרה וגם $(a, f(a)) \notin g$ שהרי g יחס חד-ערכי ו $(a, g(a)) \in g$ נסיק ש $(a, f(a)) \in f \backslash g$ ולכן $(a, f(a)) \in f \triangle g$. באופן דומה $(a, g(a)) \in g \backslash f$ ולכן גם $(a, g(a)) \in f \triangle g$.

4. לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר יחס T על $\mathbb{R}$ על ידי הכלל

$$xTy \iff (x = y) \vee (\exists a \in A : x < a \leq y)$$

ענו על הבאים:

(א) (8 נקודות) הוכיחו כי T יחס סדר חלקי על $\mathbb{R}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא x ממשי. מתקיים כי $x = x$ ולכן xTx.
- אנטי-סימטרי: יהיו x, y ממשיים כך ש xTy וגם yTx. צ"ל $x = y$. נב"ש כי $x \neq y$. מכך ש xTy וגם yTx (בצירוף ש $x \neq y$) נסיק כי

$$\exists a \in A : x < a \leq y$$

וגם

$$\exists b \in A : y < b \leq x$$

ולכן $x < a \leq y < b \leq x$ וקיבלנו $x < x$. סתירה.

- טרנזיטיבי: יהיו x, y, z ממשיים כך ש xTy ו yTz. צ"ל xTz.
  - אם $x = y$ אז yTz הוא פשוט xTz וסיימנו.
  - אם $y = z$ אז xTy הוא פשוט xTz וסיימנו.
  - אחרת, $y \neq x$ וגם $y \neq z$ ומכך ש xTy ו yTz נסיק ש

$$\exists a \in A : x < a \leq y$$

וגם

$$\exists b \in A : y < b \leq z$$

ולכן

$$x < a \leq y < b \leq z$$

וקיים איבר ב A בין x ל z ולכן xTz כנדרש.

(ב) (8 נקודות) הוכיחו שאם $\mathbb{R} \backslash A$ בת מנייה אז T יחס סדר משווה/מלא/לינארי (כל אחד והמינוח שראה בהרצאה).

פתרון: נניח $\mathbb{R} \backslash A$ בת מנייה ונוכיח כי T יסח סדר משווה. יהיו x, y ממשיים צריך להוכיח כי xTy או yTx. בלי הגבלת הכללית $x \leq y$. אם $x = y$ אזי xTy וסיימנו. אחרת $x < y$. כיוון שהקטע $(x, y]$ הוא מעוצמה $\aleph$ לא יכול להיות שהוא מוכל ב $\mathbb{R} \backslash A$. לכן קיים $a \in A$ המקיים $a \in (x, y]$. כלומר $x < a \leq y$ ולכן xTy וסיימנו.

(ג) (4 נקודות כל תת סעיף) עבור

$$A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \vee x \ge 1\}$$

והקטע $B = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ הוכיחו או הפריכו:

i. קיים $\sup B$ (ביחס ל T).

פתרון: טענה: $\sup B = 1$. הוכחה: נראה שהוא חסם מלעיל של B ושהוא החסם המלעיל הקטן ביותר.

- חסם מלעיל: לכל $x \in [0,1)$ מתקיים $1 \le 1 < x$ ומכיוון ש $A \in 1$ נסיק כי $xT1$. בנוסף $1T1$ ולכן לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $xT1$.
- החסם המעליל הקטן ביותר: יהא c חסם מלעיל של B בפרט, כיוון ש $1 \in B$ נסיק ש $(1,c) \in T$ ולכן 1קטן מ c (לפי היחס T).

ii. קיים $\inf B$ (ביחס ל T).

פתרון: טענה: לא קיים $\inf B$. הוכחה: נב"ש שקיים $\inf B$. נסמנו m. בפרט m חסם מלרע של B ולכן (כיוון ש $0 \in B$) נסיק כי $(m,0) \in T$ לכן

$$(m = 0) \vee (\exists a \in A : m < a \le 0)$$

כעת:

- אם $m = 0$ נקבל כי $(0, 0.5) \in T$ (שהרי $m = 0$ חסם מלרע של B ו $0.5 \in B$) ולכן קיים $b \in A$ המקיים $0 < b \le 0.5$ אבל לא קיים איבר A כזה (לפי הגדרת A).
- אם $\exists a \in A : m < a \le 0$ נקבל $m < 0$ ואז $m < \frac{m}{2} < 0$ ומתקיים כי: לכל $x \in [0,1]$

$$\frac{m}{2} < 0 \le x$$

ומכיוון ש $0 \in A$ נסיק $\frac{m}{2}Tx$. כלומר $\frac{m}{2}$ חסם מלרע של הקבוצה B והוא גדול יותר (ושונה מ m) (עם היחס T) סתירה לכך ש m הוא החסם המלרע הגדול ביותר (זה הגדרת $\inf B$).

5. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר את היחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$(a,b) \in S \iff f^{-1}[\{a\}] = f^{-1}[\{b\}]$$

ענו על הבאים:

(א) הוכיחו כי S הוא יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

פתרון: נוכיח שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

- רפלקסיבי: יהא x ממשי. מתקיים כי $f^{-1}[\{x\}] = f^{-1}[\{x\}]$ ולכן xSx.
- אנטי-סימטרי: יהיו x, y ממשיים כך ש xSy צ"ל yTx. כיוון ש xSy נסיק כי

$$f^{-1}[\{x\}] = f^{-1}[\{y\}]$$

ולכן

$$f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{x\}]$$

ולכן ySx כפי שרצינו.

- טרנזיטיבי: יהיו x, y, z ממשיים כך ש xSy ו ySz. צ"ל xSz. מהנתון ש ySz ו xSy נסיק

$$f^{-1}[\{x\}] = f^{-1}[\{y\}]$$

וגם

$$f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{z\}]$$

ולכן

$$f^{-1}[\{x\}] = f^{-1}[\{z\}]$$

ולכן xSz כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו: אם f אינה על אז $|\mathbb{R}/S| = |\mathrm{Img}(f)| + 1$.

פתרון: נניח f אינה על לכן קיים b שאינו בתמונה של f.

טענה: לכל $y_1 \neq y_2$ ב $\mathrm{Img}(f)$ מתקיים כי $[y_1]_S \neq [y_2]_S$.

הוכחה: יהיו $y_1 \neq y_2$ ב $\mathrm{Img}(f)$. אזי יש להם מקורות x_1, x_2 בהתאמה (כלומר $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$). נב"ש $[y_1]_S = [y_2]_S$ אזי

$$f^{-1}[\{y_1\}] = f^{-1}[\{y_2\}]$$

ומכיוון ש $x_1 \in f^{-1}[\{y_1\}]$ נסיק כי $x_1 \in f^{-1}[\{y_2\}]$. מכאן ש $f(x_1) = y_2$ בסתירה לחד-ערכיות של f.

טענה: לכל y בתמונה של f מתקיים $[y]_S \neq [b]_S$.

הוכחה: מתקיים

$$\emptyset = f^{-1}\left[\{b\}\right] \neq f^{-1}\left[\{y\}\right] \ni y$$

ולכן y, b לא מתייחסים אחד לשני ולכן $[y]_S \neq [b]_S$.

כעת משני הטענות לעיל נובע שהפונקציה

$$h : \text{Img}\left(f\right) \cup \{b\} \to {}^{\mathbb{R}}\!/_{S}$$

המוגדרת $h(y) = [y]_S$ היא חח"ע. נראה ש h גם פונקציה על ואז נקבל כי

$$\left|\text{Img}\left(f\right) \cup \{b\}\right| = \left|{}^{\mathbb{R}}\!/_{S}\right|$$

כלומר

$$\left|\text{Img}\left(f\right)\right| + 1 = \left|{}^{\mathbb{R}}\!/_{S}\right|$$

(כי b לא בתמונה של f). הוכחה: יהא $[y]_S \in {}^{\mathbb{R}}\!/_{S}$ עבור y ממשי כל שהוא.

- אם $y \in \text{Img}\left(f\right)$ אזי הוא בתחום של h ומתקיים $h(y) = [y]_S$ ומצאנו מקור ל $[y]_S$.
- אחרת, y אינו בתמונה של f ולכן $f^{-1}\left[\{y\}\right] = \emptyset$ ולכן

$$f^{-1}\left[\{y\}\right] = \emptyset = f^{-1}\left[\{b\}\right]$$

ולכן bSy ולכן $[b]_S = [y]_S$. לכן b בתחום של h והוא המקור של $[y]_S$ שהרי

$$h(b) = [b]_S = [y]_S$$

כפי שרצינו.

(ג) הוכיחו כי קיימת פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת שלכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\left|f^{-1}\left[\{y\}\right]\right| = \aleph_0$.
רמז אפשרי: $\aleph = \aleph \cdot \aleph_0$.

פתרון: כיוון ש $\aleph = \aleph \cdot \aleph_0$ נקבל כי $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{R}|$ ולכן קיימת פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ חח"ע ועל. נגדיר פונקציה

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

על ידי $h\left((n,y)\right)=y$ (קוראים לה פונקציה הטלה על הרכיב הימני). נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי $f=h\circ g$. כעת נוכיח שלכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f^{-1}\left[\{y\}\right]\right|=\aleph_0$. יהא y ממשי.
טענה:

$$f^{-1}\left[\{y\}\right]=g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]$$

הוכחה:
בכיוון $(\supseteq)$: $x\in g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]$ אזי $g(x)\in\mathbb{N}\times\{y\}$ ולכן קיים n טבעי כך ש $g(x)=(x,y)$. מהגדרת הרכבה נקבל כי

$$f(x)=h\left(g(x)\right)=h\left((n,y)\right)=y$$

ולכן $x\in f^{-1}\left[\{y\}\right]$.
בכיוון $(\subseteq)$: יהא $x\in f^{-1}\left[\{y\}\right]$ אזי $f(x)=y$. נסמן $g(x)=(n,z)$ עבור n טבעי ו z ממשי. מהגדרת הרכבה נקבל כי

$$y=f(x)=h\left(g(x)\right)=h\left((n,z)\right)=z$$

לכן $y=z$ ולכן $g(x)=(n,y)$ ולכן $x\in g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]$.
מסקנה: $\left|f^{-1}\left[\{y\}\right]\right|=\left|g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]\right|$.
כעת נוכיח ש $\left|g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]\right|=\aleph_0$ ונסיים את התרגיל.
הוכחה: כיוון ש g^{-1} חח"ע ועל (כי g כזאת) נקבל כי

$$\left|g^{-1}\left[\mathbb{N}\times\{y\}\right]\right|=\left|\mathbb{N}\times\{y\}\right|=|\mathbb{N}|=\aleph_0$$

כאשר המעבר $|\mathbb{N}|=\left|\mathbb{N}\times\{y\}\right|$ מוצדק בעזרת הפונקציה $n\mapsto(n,y)$.