פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס' 7 - פתרון

1. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}dz$, $C:|z|=4$.

פתרון:

$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$, אז

$I=\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)(z-2)}dz=\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-2)}dz-\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)}dz$ על סמך נוסחת

אינטגרל של קושי $\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-1)}dz=2\pi i\left[\sin\pi(z+1)+\cos\pi z\right]_{z=1}=-2\pi i$,

$\int_C \frac{\sin\pi(z+1)+\cos\pi z}{(z-2)}dz=2\pi i\left[\sin\pi(z+1)+\cos\pi z\right]_{z=2}=2\pi i$ מפני ששתי נקודות סינגולריות נמצאות

בתוך המעגל $C:|z|=4$ ופונקציה $f(z)=\sin\pi(z+1)+\cos\pi z$ היא אנליטית בתוכו.

2. יהי γ עקום סגור ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל γ. אם הנקודה z_0 אינה נמצאת על γ, הוכיחו כי

$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$.

פתרון:

יהי γ עקום סגור, ותהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתוך ועל העקום γ. לכן גם $f'(z)$ אנליטית

על ובתוך התחום.

אם z_0 מחוץ לתחום אז שתי הפונקציות $\frac{f(z)}{(z-z_0)^2},\frac{f'(z)}{z-z_0}$ אנליטיות על ובתוך, לכן:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z-z_0}=0=\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} .$$

אם z_0 בתוך התחום, אז לפי נוסחאות קושי עבור הפונקציות f' ו- f בהתאמה נקבל:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{z-z_0}=2\pi i f'(z_0)$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{1+1}}=\frac{2\pi i}{1!}f'(z_0)=2\pi i f'(z_0)$$

ושוב קיבלנו שוויון.

3. חשב את האינטגרל: $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z+\overline{z}}{(z-z_0)^2}dz$, עבור $|z_0|\neq 1$.

<u>פתרון</u>:

ראשית, נשים לב כי המונה באינטגרנד אינו אנליטי, לכן ננסה להביא את האינטגרנד לצורה יותר נוחה -

$$\frac{z+\overline{z}}{(z-z_0)^2}=\frac{z(z+\overline{z})}{z(z-z_0)^2}=\frac{z^2+|z|^2}{z(z-z_0)^2}=\frac{z^2+1}{z(z-z_o)^2}$$

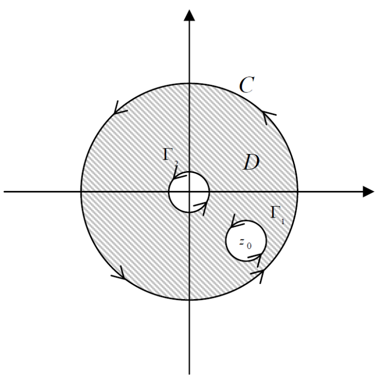
האינטגרל מחושב על המעגל $|z|=1$

כעת, נחלק לשלושה מקרים:

I. $|z_0|>1$:

$z=0$ זוהי הנק' היחידה הבעייתית באינטגרנד, ולכן, אם נסמן: $g(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-z_0)^2}$, אז נקבל לפי

נוסחת קושי: $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{g(z)}{z}dz=2\pi i\cdot g(0)=\frac{2\pi i}{z_0^2}$.



II. $|z_0|<1, z_0\neq 0$:

הנק' z_0 נמצאת בתוך המעגל. ולכן המכנה של האינטגרנד מתאפס בשתי נקודות בתוך המעגל, $z=0,z_0$.

כעת, ניצור שני מעגלים, אחד סביב $z=0$ והשני סביב z_0 -

וכמו בשאלה הקודמת, עפ"י משפט קושי-גורסה נקבל:

$$I=\int_{|z=1|}\frac{z^2+1}{z(z-z_0)^2}dz=\int_{\Gamma_1}\frac{g(z)}{(z-z_0)^2}dz+\int_{\Gamma_2}\frac{h(z)}{z}dz$$

כאשר: $h(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-z_0)^2}, g(z)=\dfrac{z^2+1}{z}=z+\dfrac{1}{z}$.

ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$I=2\pi i\cdot g'(z_0)+2\pi i\cdot h(0)=2\pi i\cdot\left[1-\frac{1}{z^2}\right]_{z=z_0}+2\pi i\cdot\frac{1}{(-z_0)^2}=2\pi i\left(1-\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0^2}\right)=2\pi i$$

III. $z_0=0$:

במקרה זה נקבל: $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3}dz$.

ולכן, אם נסמן: $g(z)=z^2+1$, אז עפ"י נוסחת קושי המוכללת נקבל:

$$I=\frac{2\pi i}{2!}g''(0)=\pi i\cdot[2]_{z=0}=2\pi i$$

4. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}dz$.

א. $C:|z+2-i|=3$

ב. $C:|z-i|=2$

ג. $C:|z+i|=1$

<u>פתרון</u>:

א.

בתוך המעגל בעל רדיוס 3 ומרכזו $z_0=-2+i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודות $a_1=-2$ ו-$a_2=i$. נחשב

$$I_4=\int_{|z+2|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\int_{|z+2|=1}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}dz}{z+2}=2\pi i\frac{e^z}{(z-i)^2}\bigg|_{z=-2}=\frac{2\pi e^{-2}}{25}(4+3i)$$

ניתן לראות ש-

$$I_1=\oint_{|z+2-i|=3}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\oint_{|z+2|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}+\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=I_4+I_2=\frac{2\pi i\left[e^{-2}+e^i(1+i)\right]}{(2+i)^2}$$

ב.

בתוך המעגל בעל רדיוס 2 ומרכזו $z_0=i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודה $a=i$. אז:

$$I_2=\int_{|z-i|=2}\frac{e^z dz}{(z-i)^2(z+2)}=\int_{|z-i|=2}\frac{\frac{e^z}{z+2}dz}{(z-i)^2}=2\pi i\left(\frac{e^z}{z+2}\right)'\bigg|_{z=i}=2\pi i\frac{e^z(1+z)}{(z+2)^2}\bigg|_{z=i}=\frac{2\pi i e^i(1+i)}{(2+i)^2}$$

ג.

בתוך מסלול האינטגרציה הפונקציה $\frac{e^z}{(z-i)^2(z+2)}$ אנליטית אז $I_3=0$

5. חשב את האינטגרל: $\int_C \frac{dz}{z^4+2iz^3}dz$.

א. $C:|z|=3$

ב. $C:|z-2i|=1$

<u>פתרון</u>:

א.

$$I_1=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^4+2iz^3}=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^3(z+2i)}$$

בתוך המעגל בעל רדיוס 3 ומרכזו $z_0=0$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית פרט לנקודות $a_1=-2i$ ו-$a_2=0$.

ניתן לפרק את האינטגרל כי:

$$I_1=\oint_{|z|=3}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z+2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}+\oint_{|z|=0.5}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=I_{11}+I_{12}$$

$$I_{11}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{\frac{1}{z^3}dz}{z+2i}=2\pi i\left.\frac{1}{z^3}\right|_{z=-2i}=\frac{\pi}{4}$$

$$I_{12}=\oint_{|z|=0.5}\frac{dz}{z^3(z+2i)}=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z+2i}dz}{z^3}=\frac{2\pi i}{2!}\left.\left(\frac{1}{z+2i}\right)''\right|_{z=0}=\pi i\left.\frac{2}{(z+2i)^3}\right|_{z=0}=-\frac{\pi}{4}$$

$$I_1=I_{11}+I_{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0$$

ב.

$$I_2=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^4+2iz^3}=\oint_{|z-2i|=1}\frac{dz}{z^3(z+2i)}$$

בתוך המעגל בעל רדיוס 1 ומרכזו $z_0=2i$ הפונקציה לאינטגרציה היא אנליטית אז $I_2=0$

6. תהי $f(z)$ מוגדרת ע"י $f(z)=\oint_{|s|=3}\frac{3s^2+7s+1}{z-s}ds$. מצא את $f'(1+i)$.

<u>פתרון</u>:

נוסחת קושי לפונקציה היא $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(s)}{s-z}ds$

$$f(z)=\oint_{|s|=3}\frac{3s^2+7s+1}{z-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|s|=3}\frac{-2\pi i(3s^2+7s+1)}{s-z}ds$$

מהביטוי נובע שבתוך התחום $|z|<3$ הפונקציה ניתן לבטא כי $f(z)=-2\pi i(3z^2+7z+1)$.

הנקודה המעניינת $z=1+i$ נמצאת בתוך התחום $|z|<3$ כי $|1+i|=\sqrt{2}<3$. אז נקבל:

$f'(z)=-2\pi i(6z+7)$ ו- $f'(1+i)=-12\pi i(1+i)-14\pi i=\pi(12-26i)$.

7. נסמן $M(r)=\max_{|z-a|=r}|f(z)|$. על ידי שימוש בנוסחת קושי, הראה כי עבור $n=0,1,2,...$ מתקיים:

$$\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}\le\frac{M(r)}{r^n}.$$

<u>פתרון</u>:

נוסחת קושי לנגזרות היא: $\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$, כאשר C מסלול סגור כלשהו סביב a , המוכל כולו בתחום האנליטיות של $f(z)$. ניתן לבחור את C להיות המעגל $|z-a|=r$ עבור $r>0$ קטן מספיק, ואז $|z-a|^{n+1}=r^{n+1}$. נפעיל הערכה אינטגרלית לערך המוחלט ונקבל:

$$\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dz^n}(a)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\le\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\oint_C\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right||dz|=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=r}\frac{|f(z)|}{r^{n+1}}dz\le\frac{1}{2\pi}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r=\frac{M(r)}{r^n}$$