מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ח

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 19/09/17

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)^2 & x>1\\ |x| & -1<x\leq 1\\ x & x\leq -1\end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x))\leq x$

תחום ראשון $x>1$

בתחום זה, $f(x)=-(x+1)^2$

כיוון ש$x>1$ אז $x+1>2$ ולכן $(x+1)^2>4$ ולכן $-(x+1)^2<-4$

ולכן $f\big(f(x)\big)=f(-(x+1)^2)=-(x+1)^2$

סה"כ אי השיוויון נראה כך:

$$-(x+1)^2\leq x$$

מתקיים בכל התחום.

תחום שני $-1<x\leq 1$

בתחום זה $f(x)=|x|$

וכן $0\leq |x|\leq 1$

ולכן

$$f\big(f(x)\big)=f(|x|)=\big||x|\big|=|x|$$

ואי השיוויון נראה כך

$$|x|\leq x$$

בתחום זה, זה מתקיים עבור $0\leq x\leq 1$ ולא מתקיים בקטע $-1<x<0$

(בגדול היה ראוי אולי לפצל לתחומים בהתאם לערך המוחלט, אך כאן זה היה מספיק קל כדי לרשום את התשובה מיד.)

תחום שלישי $x\leq -1$

בתחום זה $f(x)=x$ ולכן גם $f\big(f(x)\big)=f(x)=x$

ואי השיוויון יוצא

$$x \leq x$$

נכון תמיד.

סה"כ מתקיים בכל הממשיים פרט ל

$$-1 < x < 0$$

כלומר x מקיים את אי השיוויון אם ורק אם

$x \geq 0$ או $x \leq -1$

2. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $z^4 = (1+i)^2 - (1-i)^2$

$$(1+i)^2 - (1-i)^2 = \big((1+i) + (1-i)\big)\big((1+i) - (1-i)\big) = 2 \cdot 2i = 4i = 4\, cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[4]{4} cis\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4}\right)$$

עבור $k = 0,1,2,3$

3. יהיו שלושה וקטורים במרחב

$$v_1 = (1,1,1)$$
$$v_2 = (1,-1,0)$$
$$v_3 = (1,1,-2)$$

א. הוכיחו כי כל שניים מהוקטורים מאונכים זה לזה.

ב. מצאו a, b, c כך ש $(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$.

א.

$$(1,1,1)(1,-1,0) = 1 - 1 + 0 = 0$$
$$(1,-1,0)(1,1,-2) = 1 - 1 + 0 = 0$$
$$(1,1,1)(1,1,-2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

ב.

נניח שיש מספרים כאלה ונניח ש

$$(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$$

נמצא את a, b, c ואז נציב ונראה אם זה אכן פותר.

נכפול את שני הצדדים בv_1

$$x+y+z=av_1v_1+0+0=3a$$
$$a=\frac{x+y+z}{3}$$

נכפול את שני הצדדים בv_2

$$x-y=bv_2v_2=2b$$
$$b=\frac{x-y}{2}$$

לבסוף, נכפול בv_3

$$x+y-2z=cv_3v_3=6c$$
$$c=\frac{x+y-2z}{6}$$

כלומר אם יש פתרון לשאלה הוא יהיה

$$(x,y,z)=\frac{x+y+z}{3}(1,1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1,0)+\frac{x+y-2z}{6}(1,1,-2)$$

אפשר לוודא שזה אכן נכון.

4. הוכיחו באינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln(k!)=n\ln(2)+\ln(n!)$.

בדיקה: עבור $n=1$. צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{2\cdot 1}(-1)^k\ln(k!)=1\cdot\ln(2)+\ln(1!)$$

נפתח את הצד השמאלי

$$\sum_{k=1}^{2\cdot 1}(-1)^k\ln(k!)=(-1)^1\ln(1!)+(-1)^2\ln(2!)=\ln(2)$$

בדיוק כפי שרצינו.

יהי n עבורו

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln(k!)=n\cdot\ln(2)+\ln(n!)$$

צ"ל

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \ln(k!) = (n+1)\cdot\ln(2) + \ln\big((n+1)!\big)$$

כעת,

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \ln(k!) = \left(\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln(k!)\right) + (-1)^{2n+1}\ln\big((2n+1)!\big) + (-1)^{2n+2}\ln\big((2n+2)!\big) =$$

לפי הנחת האינדוקציה זה שווה ל

$$= n\cdot\ln(2) + \ln(n!) - \ln\big((2n+1)!\big) + \ln\big((2n+2)!\big) = n\cdot\ln(2) + \ln(n!) + \ln\left(\frac{(2n+2)!}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= n\cdot\ln(2) + \ln(n!) + \ln(2n+2) = n\cdot\ln(2) + \ln(n!) + \ln\big(2(n+1)\big) = n\cdot\ln(2) + \ln(n!) + \ln(2) + \ln(n+1) =$$

$$= \ln(2)\cdot(n+1) + \ln\big(n!\cdot(n+1)\big) = (n+1)\ln(2) + \ln\big((n+1)!\big)$$

כפי שרצינו.

5. פתרו את האינטגרל $\int e^{\sqrt{x}}dx$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right\} = \int 2te^t dt = \left\{\begin{matrix} f'=e^t & g=2t \\ f=e^t & g'=2 \end{matrix}\right\} = 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C$$

$$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

6. <u>הגדרה:</u> אוסף R של זוגות של מספרים טבעיים נקרא **שלם** אם

$$\forall a\in\mathbb{N}\exists b\in\mathbb{N}: (a,b)\in R$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהאוסף R אינו שלם.

ב. קבעו **והוכיחו** אילו מן האוספים הבאים הינם שלמים ואילו אינם שלמים:

$$T=\{(n,n) | n\in\mathbb{N}\},\ S=\left\{(n,m)\,|\,n=m^2\right\} \quad ,R=\left\{(n,m)\,|\,n<m\right\}$$

א. האוסף R אינו שלם אם

$$\exists a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}: (a,b)\notin R$$

ב.

ננסה להוכיח כי R שלם. יהי $a\in\mathbb{N}$

צריך למצוא $b\in\mathbb{N}$ כך ש $(a,b)\in R$ כלומר $a<b$

נבחר $b=a+1\in\mathbb{N}$ ואכן $a<a+1=b$. הוכחנו, והאוסף R הוא שלם

נוכיח כי S אינו שלם.

נבחר $a = 2$. צ"ל שלכל $b \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $(2, b) \notin S$

יהי $b \in \mathbb{N}$ צ"ל $2 \neq b^2$ ברור, כי 2 אינו ריבוע של מספר טבעי.

נוכיח שT שלם

יהי $a \in \mathbb{N}$ נבחר $b = a$ ואכן $(a, b) = (a, a) \in T$

7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \setminus B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים שאם $A \cap B \subseteq C$ אזי $A \setminus B \subseteq C$

א.

ננסה להוכיח. תהיינה A, B, C. נוכיח בשני הכיוונים

כיוון ראשון: נניח ש $A \subseteq B \cup C$ צ"ל $A \setminus B \subseteq C$

יהי $x \in A \setminus B$

צ"ל $x \in C$

כיוון ש $x \in A \setminus B$ מתקיים כי $x \in A, x \notin B$

כיוון ש $A \subseteq B \cup C$ וכיוון ש$x \in A$ נובע כי $x \in B \cup C$

אבל כיוון ש $x \notin B$ נובע כי $x \in C$

כיוון שני: נניח כי $A \setminus B \subseteq C$ צ"ל $A \subseteq B \cup C$

יהי $x \in A$

צ"ל $x \in B \cup C$

נחלק למקרים $x \notin B$ או $x \in B$

אם $x \notin B$ אז כיוון ש $x \in A$ נובע כי $x \in A \setminus B$ ולכן $x \in C$ כי $A \setminus B \subseteq C$. ולכן $x \in B \cup C$

אם $x \in B$ אזי $x \in B \cup C$.

דרך שנייה לחלק האחרון:

צ"ל $x \in B \cup C$

נב"ש כי $x \notin B \wedge x \notin C$

לכן כיוון ש$x \in A$ יחד עם זה ש$x \notin B$ נובע כי $x \in A \setminus B$ ויחד עם זה ש $A \setminus B \subseteq C$ נובע כי $x \in C$, בסתירה.

ב.

נבחר

$$A = \{1\}, B = C = \emptyset$$

$$A \setminus B = A \nsubseteq C, \quad A \cap B = \emptyset \subseteq C$$