

מד"ר – מועד ב' – 88-240 – 06/03/25

הצעה לפתרון באדיבות עדי מכנס

14 ביולי 2025

1. מצאו פתרון למד"ר $xy' = xy + e^x$ המקיים $y(1) = 0$.
פתרון: נשים לב כי זוהי מד"ר לינארית:

$$y' = y + \frac{e^x}{x}$$

$$y' - y = \frac{e^x}{x}$$

הפתרון ההומוגני נתון ע"י:

$$y_H = e^{-\int -1 dx} = e^x$$

הפתרון הכללי נתון ע"י:

$$y = e^{-x} \left[\int \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{e^x} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int \frac{1}{x} dx + C \right] = e^{-x} \ln|x| + Ce^{-x}$$

נמצא תנאי התחלה:

$$0 = 0 + C \iff C = 0$$

ולכן:

$$\boxed{y = e^{-x} \ln|x|}$$

2. מצאו פתרון למד"ר $3xy^2y' + y^3 = e^x$ המקיים $y(1) = 0$.
פתרון: קל לראות כי זוהי מד"ר ברנולי. נציב:

$$\begin{cases} z = y^3 \\ z' = 3y^2y' \end{cases}$$

ונקבל:

$$xz' + z = e^x$$

זוהי מד"ר לינארית:

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{e^x}{x}$$

לכן הפתרון להומוגני יהיה:

$$z_H = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$$

והפתרון הכללי יהיה :

$$z = \frac{1}{x} \left[\int \frac{e^x}{x} \cdot x \, dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int e^x \, dx + C \right] = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$$

נחזור להצבה ונקבל :

$$y = \sqrt[3]{\frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}}$$

נציב תנאי התחלה :

$$0 = \sqrt[3]{e + C} \iff C = -e$$

וביחד :

$$y = \sqrt[3]{\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}}$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^x$ המקיים $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
פתרון : זוהי מד"ר לינארית מסדר שלישי עם מקדמים קבועים. לכן נמצא תחילה את שורשי הפ"א :

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

קל לראות כי זהו בעצם הביטוי $(r+1)^3$ (למבולבלים, בדקו כי $r = -1$ שורש ואז חלקו פולינומים).
 לפיכך ניתן לפרק את המד"ר לביטוי :

$$(D+I)(D+I)(D+I)y = e^x$$

נציב :

$$\begin{cases} g = (D+I)(D+I)y \\ g' + g = e^x \end{cases}$$

הפתרון ההומוגני :

$$g_H = e^{-\int 1 \, dx} = e^{-x}$$

והכללי :

$$g = e^{-x} \left[\int e^{2x} \, dx + A \right] = \frac{1}{2}e^x + Ae^{-x}$$

נחזור להצבה ונקבל שיש לפתור את המד"ר :

$$(D+I)(D+I)y = \frac{1}{2}e^x + Ae^{-x}$$

שוב נציב :

$$\begin{cases} g = (D+I)y \\ g' + g = \frac{1}{2}e^x + Ae^{-x} \end{cases}$$

כידוע, פתרון ההומוגני הוא $g_H = e^{-x}$. לכן הפתרון הכללי :

$$g = e^{-x} \left[\int \frac{1}{2}e^{2x} + A \, dx + B \right] = \frac{1}{4}e^x + Axe^{-x} + Be^{-x}$$

כעת נפתור את המד"ר :

$$y' + y = \frac{1}{4}e^x + Axe^{-x} + Be^{-x}$$

ידוע כי פתרון ההומוגנית הוא $y_H = e^{-x}$. לכן הפתרון הכללי הינו :

$$y = e^{-x} \left[\int \frac{1}{4}e^{2x} + Ax + B dx + C \right] = \frac{1}{8}e^x + Ax^2e^{-x} + Bxe^{-x} + Ce^{-x}$$

כעת נמצא תנאי התחלה :

$$0 = \frac{1}{8} + C \iff C = -\frac{1}{8}$$

נגזור :

$$y' = \frac{1}{8}e^x + 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x} + \frac{1}{8}e^{-x}$$

$$0 = \frac{1}{8} + B + \frac{1}{8} \iff B = -\frac{1}{4}$$

נגזור :

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{8}e^x + 2Ae^{-x} - 2Axe^{-x} - 2Axe^{-x} + Ax^2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{8}e^{-x} \\ &= \frac{1}{8}e^x + 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{8}e^{-x} \end{aligned}$$

$$0 = \frac{1}{8} + 2A - \frac{1}{8} \iff A = 0$$

וביחד :

$$y = -\frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{8}e^x$$

4. כדור בעל מסה $m = 1_{kg}$ נזרק כלפי מעלה, ע"י יולי, במהירות התחלתית של $20_{m/s}$.

הכוחות הפועלים על הגוף הם כוח המשיכה שגודלו $mg = m \cdot 10$,

וכוח התנגדות האוויר ששווה בגודלו לגודל המהירות בריבוע $v^2(t)$.

תוך כמה זמן יגיע הכדור לגובה המקסימלי? מה הגובה המקסימלי אליו יגיע הכדור?

(אפשר לתת תשובה בקירוב של שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.)

פתרון : נקבע את ראשית הציר להיות היכן שהכדור התחיל בתנועתו. לפי החוק השני של ניוטון נקבל כי :

$$y'' = ma = \sum F = -10 - v^2$$

זוהי מד"ר ללא t . נציב :

$$\begin{cases} z = v \\ z' = a \end{cases}$$

ונקבל :

$$v' = -10 - v^2$$

זוהי מד"ר פרידה :

$$\frac{v'}{-10 - v^2} = 1$$

ונקבל :

$$t + A = -\frac{\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{10}}$$

$$v = \sqrt{10} \tan\left(-\sqrt{10}t + A\right)$$

כעת לפי הנתון, הגוף התחיל ממחירות התחלתית של $20_{m/s}$. לכן :

$$20 = \sqrt{10} \tan(A) \iff A = \arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) \approx 1.413_{m/s}$$

כעת ניתן לחזור להצבה ולקבל :

$$y' = \sqrt{10} \tan\left(-\sqrt{10}t + \arctan\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

$$y = \ln\left|\cos\left(\sqrt{10}t - \arctan\left(2\sqrt{10}\right)\right)\right| + B$$

כיוון שהגוף נזרק מ-0, נקבל :

$$-B = \ln\left|\cos\left(\arctan\left(2\sqrt{10}\right)\right)\right| \iff B = -\frac{\ln(41)}{2} \approx 1.856_m$$

כעת, נבדוק מתי המחירות מתאפסת בשביל שנראה מתי יגיע הכדור לשיא הגובה :

$$\sqrt{10} \tan\left(-\sqrt{10}t + \arctan\left(2\sqrt{10}\right)\right) = 0$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(2\sqrt{10}\right) \approx \boxed{0.447_s}$$

ולכן שיא הגובה יהיה :

$$\ln\left|\cos\left(\arctan\left(2\sqrt{10}\right) - \arctan\left(2\sqrt{10}\right)\right)\right| - \frac{\ln(41)}{2} \approx \boxed{1.856_m}$$

5. נסמן ב D את אופרטור הגזירה, ב I את אופרטור הזהות, ונסמן $S = D - I$.

מצאו את הפתרון הכללי למד"ר $xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$.

רמז : הביטו באופרטור SxS .

פתרון : אציע שני דרכים לפתרון. דרך אחת היא להיעזר ברמז : נציב

$$u = y' - y$$

ולכן :

$$v = xu = xy' - xy$$

ולכן :

$$Sv = xy'' + y' - y - xy' - xy' + xy = xy'' + (1 - 2x)y' + (x - 1)y = 0$$

לכן עלינו לפתור את המד"ר :

$$Sv = 0$$

כלומר לפתור את המד"ר הלינארית ההומוגנית :

$$v' - v = 0$$

אשר פתרונה ההומוגני נתון ע"י :

$$v = Ae^{-\int -1 dx} = Ae^x$$

כעת נחזור להצבה :

$$Ae^x = xy' - xy$$

$$y' - y = \frac{Ae^x}{x}$$

פתרון המד"ר ההומוגנית נתון ע"י :

$$y_H = e^x$$

ולכן הפתרון הכללי :

$$y = e^x \left[\int \frac{A}{x} dx + B \right] = \boxed{Ae^x \ln|x| + Be^x}$$

דרך נוספת לפתרון : נשים לב כי סכום כל הפונקציות המקדמות הינו 0 לכל x :

$$x + 1 - 2x + x - 1 = 0$$

ולכן ניתן לנחש כי $y_1 = e^x$ פתרון. נרצה למצוא באמצעותו את הפתרון השני למד"ר. נסדר את המד"ר :

$$y'' + \frac{1-2x}{x}y' + \frac{x-1}{x}y = 0$$

ניעזר בשיטת דלאמבר ונקבל :

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \int \frac{e^{-\int \frac{1-2x}{x} dx}}{e^{2x}} dx = e^x \int \frac{e^{-\ln|x|+2x}}{e^{2x}} dx = e^x \int e^{-\ln|x|} dx \\ &= e^x \int \frac{1}{x} dx = e^x \ln|x| \end{aligned}$$

וביחד :

$$y = \boxed{Ae^x + Be^x \ln|x|}$$