

פתרון מבחן מועד ג' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 18/05/25

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$א. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+2x^2))}{1-\cos(3x)}$$

$$\stackrel{WIN}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\ln(1+2x^2))}{\ln(1+2x^2)} \cdot \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)} \cdot \frac{2}{9} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$ב. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} \stackrel{x > 0}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

תרגיל העשרה:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} - x = \left\{ \sqrt{\infty(1 + 0 + 0)} - (-\infty) \right\} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + 3n} \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{2n} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9^n \left(1 + \frac{3n}{9^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 9 \cdot \left(1 + \frac{3n}{9^n}\right)^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{סדרי גודל}}{=} 9 \cdot 1^0 = 9$$

הערה: השימוש בסדרי גודל הוא בשאיפה לאינסוף במנה של

$$\frac{x^a}{e^{bx}}, \quad \text{או} \quad \frac{\ln^a(x)}{x^b}$$

כאשר $a, b > 0$

2.

א. חשבו את $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x) dx \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

ב. חשבו את $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{e^x - 1} + C$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\sin(x) = -x$.

נעביר אגף

$$\sin(x) + x = 0$$

ונבדוק את שורשי הפונקציה

$$h(x) = \sin(x) + x$$

$$h'(x) = \cos(x) + 1 \geq 0$$

מכאן שלפונקציה אין יותר משורש יחיד.

אבל יש לה שורש יחיד, כי $x = 0$ מאפס את הפונקציה.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $2 \cos(x) = x^2$.

נעביר אגף

$$x^2 - 2 \cos(x) = 0$$

נבנה פונקציה

$$h(x) = x^2 - 2 \cos(x)$$

נגזור

$$h'(x) = 2x + 2 \sin(x)$$

זה בדיוק פעמיים הפונקציה מסעיף א'! ולכן גם היא עולה תמיד.

יחד עם העובדה ש $h'(0) = 0$ נובע כי $h' > 0$ בתחום $(0, \infty)$ ו $h' < 0$ בתחום $(-\infty, 0)$

ולכן h עולה בתחום $[0, \infty)$ ויורדת בתחום $(-\infty, 0]$.

לכן יש לפונקציה מינימום גלובאלי (מוחלט) בנק' $x = 0$.

נציב ונגלה ש

$$h(0) = -2$$

נבדוק במקביל גבולות בקצוות

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 2 \cos(x) = \{\infty - \text{חסום}\} = \infty$$

הפונקציה רציפה כצירוף של אלמנטריות, בתחום הירידה מחליפה מחיובי לשלילי ולכן חותכת את הציר פעם אחת

וגם בתחום העלייה מחליפה משלילי לחיובי ולכן חותכת את הציר פעם אחת.

סה"כ שני חיתוכים עם הציר, כלומר שני פתרונות למשוואה המקורית.

4. תהי f פונקציה.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $f''''(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, אזי קיימת נק' $c \in \mathbb{R}$ עבורה $f(c) = 0$.

הפרכה: נבחר $f(x) = 1$

אכן $f''''(x) = 0$ בכל הממשיים, אך $f(x) \neq 0$ בכל הממשים.

ב. הוכיחו או הפריכו: $f''(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ וכן $f(1) < f(2)$ אזי קיימת נק' $c \in \mathbb{R}$ עבורה $f(c) = 0$.

הוכחה:

נתון כי

$$f''(x) = 0$$

נעשה אינטגרל

$$f'(x) = c_1$$

נעשה שוב אינטגרל

$$f(x) = c_1x + c_2$$

נתון כי $f(1) < f(2)$ כלומר

$$c_1 + c_2 < 2c_1 + c_2$$

$$c_1 > 0$$

רוצים $c_1x + c_2 = 0$ ואכן עבור

$$x = -\frac{c_2}{c_1}$$

מתקיים כי $f(x) = 0$.

5. תהי סדרה a_n סדרה חיובית ומונטונית יורדת, ותהי $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$.

א. הוכיחו כי S_{2n-1} מונטונית יורדת.

נסמן $b_n = S_{2n-1}$. לכן צריך להוכיח כי

$$b_{n+1} \leq b_n$$

כלומר צ"ל כי

$$S_{2(n+1)-1} \leq S_{2n-1}$$

צ"ל כי

$$S_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k \leq \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_k$$

נעביר אגף, הרוב יצטמצם

$$\sum_{k=2n}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k \leq 0$$

$$\sum_{k=2n}^{2n+1} (-1)^{k+1} a_k = -a_{2n} + a_{2n+1} \overset{\substack{a_n \\ \text{יורדת}}}{\leq} 0$$

ב. הוכיחו כי S_{2n-1} מתכנסת לגבול סופי.

נוכיח כי $S_{2n-1} \geq 0$ כלומר חסומה מלמטה, וכיוון שהיא יורדת ינבע שהיא מתכנסת לגבול סופי.

ננסה לעשות זאת באינדוקציה.

עבור $n = 1$ נקבל

$$S_1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} a_k = a_1 \geq 0$$

יהי n עבורו $S_{2n-1} \geq 0$ צ"ל כי

$$S_{2n+1} \geq 0$$

ראינו מקודם ש

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

האינדוקציה לא עובדת כאן כי קיבלנו חיובי ועוד שלילי.

נעשה משהו אחר

$$S_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n-1}}_{\geq 0}$$

סה"כ הוכחנו כי הסדרה אי שלילית.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{n^2}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} + 1 \right) \rightarrow \int_0^1 (1+x) dx$$

כיוון ש $1+x$ רציפה בקטע $[0,1]$, אזי הגבול לעיל תקף לפי משפט לגבי סכומי רימן.

$$\int_0^1 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

לכן סה"כ $a_n \rightarrow \frac{3}{2}$

ב. קרבו את $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{1000}$. h

נביט בפונקציה $f(x) = e^x$

הנקודה המצוייה (נקודת ההשקה) היא $a = 0$

הנקודה הרצוייה היא $x = -\frac{1}{3}$

ננחש שעבור $n = 5$ זה מספיק

$$R_5 = \frac{f^{(6)}(c)}{6!} \left(-\frac{1}{3} - 0 \right)^6 = \frac{e^c}{6! \cdot 3^6}$$

כאשר $-\frac{1}{3} < c < 0$

כיוון ש $c < 0$ נובע כי

$$0 < \frac{e^c}{6! \cdot 3^6} \leq \frac{1}{6! \cdot 3^6} < \frac{1}{1000}$$

ולכן הקירוב הוא

$$p_5\left(-\frac{1}{3}\right)$$

כאשר

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

סה"כ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 2!} - \frac{1}{3^3 3!} + \frac{1}{3^4 4!} - \frac{1}{3^5 5!}$$

,

