

### תרגיל בית 5 אינפי 3

1. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי  $(0, 0)$  אלא לגבי כל הנקודות במישור).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

2. נגדיר את  $f(x, y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$  על כל המישור  $\mathbb{R}^2$ .

(א) מצא את הנגזרת  $f'_x(x, y)$  בכל נקודה בה היא קיימת.

(ב) האם  $f'_x(x, y)$  חסומה בסביבת  $(0, 0)$ ?

(ג) הוכח כי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .

3.

(א) תהי פונקציה דיפרנציאביליות בנקודה  $(0, 0)$ . נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0, 0) = 0, \quad f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

אז  $h(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ .

(ב) תהינה  $f(x, y)$  ו  $g(x, y)$  שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה  $(0, 0)$ . נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$g(0, 0) = f(0, 0), \quad g'_x(0, 0) = f'_x(0, 0), \quad g'_y(0, 0) = f'_y(0, 0)$$

אז  $h(x, y)$  דיפרנציאבילית ב  $(0, 0)$ . (הערה: הטענה ההפוכה לטענה זו גם נכונה, מי שרוצה מוזמן לנסות להוכיח - מומלץ להשתמש בנגזרות מכוונות).

4. נגדיר פונקציה

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $(3, 2, 1)$  בכיוון  $h = (h_1, h_2, h_3)$ , שימו לב ש  $h$  לא בהכרח וקטור יחידה.

5. תהי  $f(x, y)$  פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$  ומקיימת כי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = 1$$

מצאו את  $f'_y(0, 0)$ .