

פתרון תרגיל 7

23 בינואר 2018

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$.

ב. $R_2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$.

ג. $R_3 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}, a = b\}$.

פתרון:

א. רפלקסיבי: לא, לכל מספר ובפרט ל-1 מתקיים $1 \not\leq 1$, ולכן $(1, 1) \notin R_1$.

סימטרי: לא, למשל, $1 < 2$ אך $2 \not< 1$. כלומר, $(1, 2) \in R_1$ אך $(2, 1) \notin R_1$.

טרנזיטיבי: כן, אם $(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1$ נקבל $a < b \wedge b < c$ מה שגורר $a < c$, ולכן $(a, c) \in R_1$.

ב. רפלקסיבי: כן. יהי $a \in \mathbb{N}$, לכן מתקיים $a \leq a$, ולכן $(a, a) \in R_2$.

סימטרי: לא, למשל, $1 \leq 2$ אך $2 \not\leq 1$. כלומר, $(1, 2) \in R_2$ אך $(2, 1) \notin R_2$.

טרנזיטיבי: כן, אם $(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2$ נקבל $a \leq b \wedge b \leq c$ מה שגורר $a \leq c$, ולכן $(a, c) \in R_2$.

ג. רפלקסיבי: כן. לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $a = a$, ולכן $(a, a) \in R_3$.

סימטרי: כן. נניח $(a, b) \in R_3$, ולכן $a = b$. ולכן $b = a$, ולכן $(b, a) \in R_3$.

טרנזיטיבי: כן. אם $(a, b) \in R_3 \wedge (b, c) \in R_3$ נקבל $a = b \wedge b = c$ מה שגורר $a = c$, ולכן $(a, c) \in R_3$.

לכן זהו יחס שקילות. מחלקות השקילות: לכל $a \in \mathbb{N}$ נמצא את מחלקת השקילות שלו:

$$[a]_{R_3} = \{b \in \mathbb{N} | (a, b) \in R_3\} = \{b \in \mathbb{N} | a = b\} = \{a\}$$

כלומר, הנקודות $\{a\}$ הוא מחלקת השקילות של a .

2. נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, \dots, A_n$. נגדיר יחס R על A ע"י:

$$R = \{(x, y) \in A \times A | \exists i : x \in A_i \wedge y \in A_i\}$$

הוכח או הפרד:

א. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ב. $R \Leftarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = A$ רפלקסיבי.

ג. לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$ טרנזיטיבי.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftrightarrow$ לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$.

פתרון:

א. הוכחה: יהי $a \in A$, צריך להראות ש- $(a, a) \in R$. מהנתון ש- $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ נובע שקיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן $(a, a) \in R$.

ב. הוכחה: נניח ש- R רפלקסיבי, מספיק להוכיח ש- $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$, כי ההכלה בצד השני טריוויאלית, כי כולם תתי קבוצות של A . לכן יהי $a \in A$, כיון ש- R רפלקסיבי נובע ש- $(a, a) \in R$, ולכן קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $a \in A_i$, ולכן הוא גם באיחוד.
ג. הוכחה: יהיו $a, b, c \in A$ כך ש- $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$, אזי נובע שקיים i כך ש- $a \in A_i \wedge b \in A_i$, וקיים j כך ש- $b \in A_j \wedge c \in A_j$. כעת, אם $i \neq j$, אז נובע ש- $b \in A_i \cap A_j$, בסתירה לנתון. לכן $i = j$, ולכן גם $c \in A_i$, ולכן $(a, c) \in R$.

ד. הפרכה: ניקח את $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ואת תתי הקבוצות: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$. אזי R טרנזיטיבי אבל $A_1 \cap A_2 = \{3\} \neq \emptyset$.

3. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל $\mathbb{R}$ (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x - y| < 1 \Leftrightarrow xRy$

ב. $x - y < 1 \Leftrightarrow xSy$

ג. $x - y < -1 \Leftrightarrow xTy$

פתרון:

א. לא. היחס לא טרנזיטיבי. למשל, $1.5R0.6 \wedge 0.6R0.2$ כי $0.9 < 1.5 - 0.6$, אבל $1 \nmid 0.6 - 0.2$ כי $1.3 > 1.5 - 0.2$.

ב. לא. היחס לא טרנזיטיבי. אותה דוגמא בדיוק, כי הרי לא השתמשנו בערך המוחלט.

ג. לא. היחס לא רפלקסיבי. למשל, $-1 \nmid 0 - 0 = 0$, ולכן $0 \not R 0$.

4. נתונות הקבוצות $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

א. תנו דוגמא ליחס שקילות E מעל A .

ב. תנו דוגמא ליחס שקילות F מעל B .

ג. השתמשו בסעיפים א, ב ורשמו את כל איברי הקבוצה

$$G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) | (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$$

פתרון:

א. $E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

ב. $F = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

ג. $G = \{((1, 3), (1, 3)), ((1, 4), (1, 4)), ((1, 5), (1, 5)), ((2, 3), (2, 3)), ((2, 4), (2, 4)), ((2, 5), (2, 5)), ((3, 3), (3, 3)), ((3, 4), (3, 4)), ((3, 5), (3, 5)), ((1, 3), (2, 3)), ((1, 4), (2, 4)), ((1, 5), (2, 5)), ((2, 3), (1, 3)), ((2, 4), (1, 4)), ((2, 5), (1, 5))\}$

5. יהי E יחס שקילות על קבוצה A , ויהי F יחס שקילות על קבוצה B . תהי

$$G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) | (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$$

הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.

פתרון:

רפלקסיביות: יהי $(a, b) \in A \times B$. כיון ש- E יחס שקילות לכן הוא רפלקסיבי ולכן $(a, a) \in E$. באותו אופן $(b, b) \in F$. ולכן, לפי הגדרת G , מתקיים $((a, b), (a, b)) \in G$. משל.

סימטריות: נניח $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in G$. צ"ל $((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in G$. אכן, מהנתון נקבל $(a_1, a_2) \in E$, וכיון ש- E יחס שקילות הוא סימטרי ולכן $(a_2, a_1) \in E$. באותו אופן מהנתון נקבל $(b_1, b_2) \in F$ ולכן גם $(b_2, b_1) \in F$ ומהגדרת G נובע $((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in G$. משל.

טרנזיטיביות: נניח $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in G \wedge ((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in G$. לכן נקבל $(a_1, a_2) \in E \wedge (a_2, a_3) \in E$. יחס שקילות ולכן טרנזיטיבי, ולכן $(a_1, a_3) \in E$. באותו אופן נקבל $(b_1, b_2) \in F \wedge (b_2, b_3) \in F \Rightarrow (b_1, b_3) \in F$ ולכן לפי הגדרת G נקבל $((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in G$.

6. A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A . הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R \cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.

ג. $[(A \times A) \setminus R] \cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.

פתרון:

א. לא. $A = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}, S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3)\}$. שימו לב ש- $(1, 2) \in R \cup S \wedge (2, 3) \in R \cup S$ אבל $(1, 3) \notin R \cup S$, ולכן $R \cup S$ לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ב. לא. $A = \{1\}, R = \{(1, 1)\}$ אזי $(A \times A) \setminus R = \emptyset$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

ג. לא. $A = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ אזי

$$[(A \times A) \setminus R] \cup I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

ולכן $(2, 3) \in [(A \times A) \setminus R] \cup I_A \wedge (3, 1) \in [(A \times A) \setminus R] \cup I_A$ (כי הם לא ב- R), ובנוסף, $(2, 1) \notin [(A \times A) \setminus R] \cup I_A$ (כי הוא ב- R), ולכן $[(A \times A) \setminus R] \cup I_A$ לא טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ד. לא. $A = \{1\}, R = S = \{(1, 1)\}$ אזי $R \setminus S = \emptyset$ ולא רפלקסיבי, ולכן לא יחס שקילות.

7. נגדיר יחס S על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:

לכל $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מתקיים $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \leftrightarrow x_1 = x_2$

א. הוכיחו ש S יחס שקילות.

ב. רשמו שלושה איברים במחלקת השקילות $[(1, -3)]_S$.

ג. מה המשמעות הגיאומטרית של מחלקת השקילות $[(a, b)]_S$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.

פתרון:

א. רפלקסיביות: יהי $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, אזי כיון ש- $x = x$ נקבל $((x, y), (x, y)) \in S$.

סימטריות: נניח $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S$, לכן $x_1 = x_2$, ולכן $x_2 = x_1$ ולכן, לפי הגדרת S מתקיים $((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \in S$.

טרנסיטיביות: נניח $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in S \wedge ((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \in S$, לכן, לפי הגדרת S , $x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3$ ולכן $x_1 = x_3$ ולכן $((x_1, y_1), (x_3, y_3)) \in S$.
 ב. $(1, \pi), (1, 1), (1, e)$.

ג. הישר המקביל לציר ה- y , החותך את ציר ה- x בנקודה $(a, 0)$. מה שנקרא $x = a$.

8. נגדיר יחס S מעל הקבוצה $\mathbb{N}$ באופן הבא:

לכל $a, b \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{b} \rfloor \Leftrightarrow (a, b) \in S$. $(a, b) \in S \Leftrightarrow \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{b} \rfloor$ (עגול למטה).
 א. הוכיחו כי יחס שקילות מעל $\mathbb{N}$.

ב. מצאו (כתבו בצורה מפורשת) את כל מחלקות השקילות השונות של $\mathbb{N}$ לגבי יחס השקילות S .

ג. מהי החלוקה של $\mathbb{N}$ המושרית ע"י יחס השקילות S ?

ד. רשמו את $\mathbb{N}$ כאיחוד הקבוצות בחלוקה.

פתרון:

א. רפלקסיביות: יהי $a \in \mathbb{N}$, לכן $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{a} \rfloor$, ולכן $(a, a) \in S$.

סימטריות: נניח $(a, b) \in S$. לכן $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{b} \rfloor$, ולכן $\lfloor \frac{7}{b} \rfloor = \lfloor \frac{7}{a} \rfloor$, ולכן $(b, a) \in S$.

טרנזיטיביות: נניח $(a, b) \in S \wedge (b, c) \in S$. לכן $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{b} \rfloor \wedge \lfloor \frac{7}{b} \rfloor = \lfloor \frac{7}{c} \rfloor$, ולכן $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{c} \rfloor$, ולכן $(a, c) \in S$.

ב. $\{1\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{1} \rfloor = 7\} = [1]_S$, כי אם $a \geq 2$ נקבל $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$.

$\{2\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3\} = [2]$, כי אם $a \geq 3$ נקבל $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$.

$\{3\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2\} = [3]$, כי אם $a \geq 4$ נקבל $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1$.

$\{4, 5, 6, 7\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1\} = [4]$, כי עבור אלו זה אכן מתקיים ואם $a \geq 8$ נקבל $\lfloor \frac{7}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{8} \rfloor = 0$.

$\{8, 9, 10, \dots\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{7}{a} \rfloor = \lfloor \frac{7}{8} \rfloor = 0\} = [8]$. כי אם

$a \geq 8$ אז נקבל $0 \leq \lfloor \frac{7}{a} \rfloor \leq \lfloor \frac{7}{8} \rfloor = 0$, כאשר מעבר * נובע מכך שמדובר במספר חיובי, ולכן גם העיגול כלפי מטה חיובי.

ג. החלוקה: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 8\}\}$.

ד. $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 8\}$.