

תרגיל 8 בפונקציות מרוכבות

1. פתחו את הפונקציות הבאות לטור טיילור בנקודות הנתונות ומצאו רדיוס התכנסות.

א. $f(z) = ze^{z^2-2z}$ סביב $z=1$.

ב. $f(z) = \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)e^z$ סביב $z=0$.

ג. $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$ סביב הנקודות $z=0$ ו- $z=i$.

2. א. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z) = \frac{1}{1+z^2+z^4}$ סביב $z=1$.

ב. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z) = \frac{1}{e^{z^2}-1}$ סביב $z=2$.

הערה: אין צורך לחשב את טור טיילור של הפונקציות בתרגיל זה. יש למצוא את המרחק הקצר ביותר בין נקודת הפיתוח לבין קבוצת הנקודות הסינגולריות של כל פונקציה.

3. א. תהי f פונקציה שלמה אשר מקבלת ערכים ממשיים על הציר הממשי ומקבלת ערכים מדומים טהורים,

כלומר ערכים מהצורה $ib, b \in \mathbb{R}$, על הציר המדומה. הוכיחו ש- f פונקציה אי-זוגית.

ב. תהי f פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| \leq |z|^2$ לכל z מרוכב. יהי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח טיילור

של f סביב $z=0$. הראו ש- $a_n = 0$ עבור $n \geq 3$. רמז: השתמשו בהצגת קושי בשביל המקדם a_n ואז

השתמשו בקאורדינטות קוטביות.

4. עבור הפונקציות הבאות מצאו את הסדר של האפס בנקודות הנתונות.

$$\text{א. סביב } z=0 \quad f(z) = \frac{\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}\right)^8}{(z^4 + z^5 + \dots + z^{18}) \left(\sin^2(z^8)\right)}$$

$$\text{ב. סביב } z=1 \quad f(z) = \frac{\left(e^{e^{z-1}-z} - 1\right)^3}{(z-1)^5}$$