

קורס: 88-231-01,05,07  
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ  
י"ב אלול תשע"א

## מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. יש חובה לנמק כל תשובה.  
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. לכל  $z \in \mathbb{C}$  נגדיר  $f(z) = z^2 e^z - 4z^3 e^{z^2}$ . הוכיחו שאם  $z_0$  הוא מספר מרוכב כך ש-  
 $f(z_0) = 5$  אז  $f(\bar{z}_0) = 5$

2. א. הגדירו ואפיינו "אפס מסדר  $k$ " של פונקציה אנליטית.  
ב. נניח ש-  $f(z)$  פונקציה שלימה כך שלכל  $n$  טבעי  $|f(\frac{1}{n})| < \frac{1}{n^n}$ . הוכיחו ש- $f(z)$  קבועה.

3. חשבו  $\int_{|z|=1} e^{1/z} \sin(\frac{1}{z}) dz$  כאשר המסילה מכוונת נגד כיוון השעון.

4. חשבו:  $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$ . הצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש-  $u(x, y)$  ו-  $v(x, y)$  מקיימת את משוואות קושי-רימן  $u_x = v_y; u_y = -v_x$  בתחום  $D \subset \mathbb{C}$ . הוכיחו כי הפונקציה  $h(x, y) = u^3(x, y) - 3u(x, y)v^2(x, y)$  הרמונית ב- $D$ .

6. נגדיר  $f(z) = z^4 - 4z^3 + 8z - 2$ . קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל-  $f(z)$  בתוך העיגול  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$ . הצדיקו את תשובתכם.