חדוו"א 1 89118 תרגיל 11

שאלה 1

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2}$.

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $\dfrac{x^3-4}{x^2}=x+a$ אין שורשים ממשיים?

פתרון שאלה 1

א. תחום הגדרה – המכנה מתאפס כאשר $x^2=0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

אסימפטוטה אנכית – כאשר $x=0$ המכנה מתאפס ולכן הישר $x=0$ חשוד לאסימפטוטה אנכית.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-4}{x^2}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-4}{x^2}=-\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת –

תזכורת:

אסימפטוטה משופעת

הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

במקרה המיוחד $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

משפט

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,∞). אם קיימים הגבולות $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$.

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty,c)$. אם קיימים הגבולות $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$.

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=1,b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right]=0$$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=1,b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4}{x^2}\right]=0$$

האסימפטוטה המשופעת ב $-\infty$ וב $+\infty$ היא $y=x$.

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה.

נבדוק תחילה לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת:

$$f(x)=\frac{x^3-4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-2x\cdot\left(x^3-4\right)}{x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4+8x}{x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3} .$$

הנגזרת מאפסת כאשר $x^3+8=0$ כלומר כאשר $x=-2$.

נבדוק תחומי עלייה וירידה:

x	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x$

$f(x)$	עולה		יורד		עולה
$f'(x)$	חיובי	0	שלילי		חיובי

נקודת מקסימום $(-2,-3)$.

תחומי עלייה $x>0$ או $x<-2$.

תחומי ירידה $-2<x<0$.

נמצא נקודות פיתול:

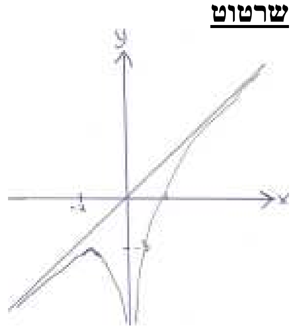
נשווה את הנגזרת השנייה לאפס

$$f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-3x^2\cdot\left(x^3+8\right)}{x^6}\Rightarrow f''(x)=\frac{-24x^2}{x^6}\Rightarrow f''(x)=\frac{-24}{x^4}.$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אין נקודות פיתול.

הנגזרת השנייה שלילית בכל תחום הגדרת הפונקציה ולכן הפונקציה קעורה כלפי מטה לכל x.

<u>שרטוט</u>



ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכל הפונקציה מתחת לישר $y=x$ ולכן כאשר $a>0$ אין פתרון למשוואה $\frac{x^3-4}{x^2}=x+a$.

<u>שאלה 2</u>

א. חקור באופן מלא (תחום הגדרה, אסימפטוטות, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות ונקודות פיתול) וצייר סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{|x|-2}$.

ב. לאילו ערכים של פרמטר a למשוואה $f(x)=a$ אין פתרון ממשי?

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. תחום הגדרה: כאשר המכנה מתאפס הפונקציה לא מוגדרת.

$|x|-2\neq 0 \Rightarrow |x|\neq 2 \Rightarrow x\neq 2, x\neq -2$.

אסימפטוטות אנכיות – הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x=2, x=-2$ ולכן הישרים $x=2, x=-2$ יכולים להיות אסימפטוטות אנכיות.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{|x|-2}=+\infty,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty,\ \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{|x|-2}=-\infty$$

סה"כ קיבלנו ש $x=2, x=-2$ אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטות משופעות – כאשר $x>0$ נקבל ש $|x|=x$ ולכן עבור $x\to+\infty$ ניתן להסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-3}{x-2}\right]=2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x\to+\infty$ היא $y=x+2$.

כאשר $x<0$ נקבל ש $|x|=-x$ ולכן עבור $x\to-\infty$ ניתן להסתכל על הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x\cdot(-x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{-x^2-2x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\cdot(-1)x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3}{-x-2}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3}{-x-2}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-3-x^2-2x}{-x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x-3}{-x-2}\right]=2$$

האסימפטוטה המשופעת ב $x\to-\infty$ היא $y=-x+2$.

נקודות קיצון – נבדוק עבור $x>0$ ואז $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-1\cdot(x^2-3)}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=1, x=3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	0	$<x<$	1	$<x<$	2	$<x<$	3	$<x$
$f(x)$		עולה	מקסימום	יורד		יורד	מינימום	עולה
$f'(x)$		חיובי	0	שלילי		שלילי	0	חיובי

$(1,2)$ מקסימום, $(3,6)$ מינימום.

נבדוק עבור $x<0$ ואז $f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}$.

נגזור נשווה לאפס:

$$f(x)=\frac{x^2-3}{-x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(-x-2)+1\cdot(x^2-3)}{(-x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-4x+x^2-3}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-x^2-4x-3}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{(x-2)^2}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=-1, x=-3$ ולכן הן נקודות חשודות לקיצון.

נבדוק תחומי עלייה וירידה והאם הנקודות החשודות הן קיצון.

x	$x<$	-3	$<x<$	-2	$<x<$	-1	$<x<$	0
$f(x)$	יורד	מינימום	עולה		עולה	מקסימום	יורד	
$f'(x)$	שלילי	0	חיובי		חיובי	0	שלילי	

$(-1,2)$ מקסימום, $(-3,6)$ מינימום, $(0,1.5)$.מינימום.

תחומי עלייה: $-3<x<-2, -2>x>-1, 0<x<1, 3<x$

תחומי ירידה: $x<-3, -1<x<0, 1<x<2, 2<x<3$.

נקודות פיתול:

הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2-3}{|x|-2}$ היא פונקציה זוגית מכיוון ש $f\left(a\right)=\frac{a^2-3}{a-2}=\frac{\left(-a\right)^2-3}{|-a|-2}=f\left(-a\right)$.

מספיק לבחון נקודות פיתול עבור $0<x$.

נחשב את הנגזרת השנייה של $f\left(x\right)=\frac{x^2-3}{x-2}$.

$$f\left(x\right)=\frac{x^2-3}{x-2}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{x^2-4x+3}{\left(x-2\right)^2}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{x^2-4x+4-1}{\left(x-2\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{\left(x-2\right)^2}{\left(x-2\right)^2}-\frac{1}{\left(x-2\right)^2}\Rightarrow f'\left(x\right)=1-\left(x-2\right)^{-2}\Rightarrow f''\left(x\right)=\frac{2}{\left(x-2\right)^3}$$

הנגזרת השנייה לא מתאפסת ולכן אי נקודות פיתול.

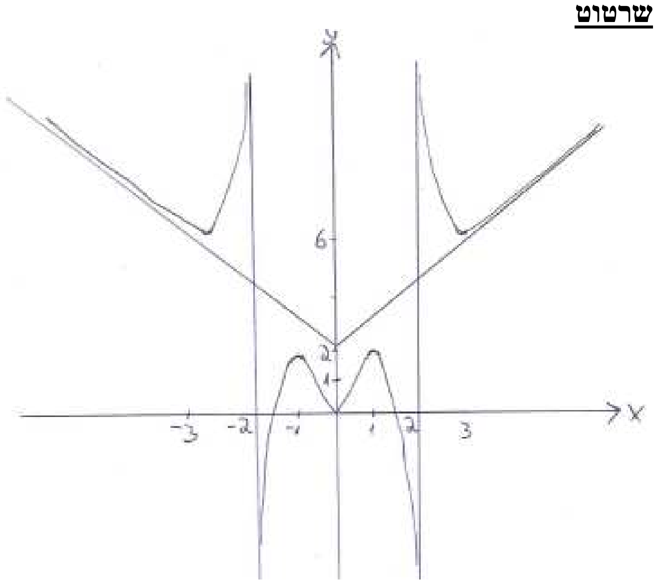
נבדוק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה. נשים לב שאם הפונקציה זוגית אז גם הנגזרת השנייה זוגית ואז ניתן להסיק תחומי קמירות כלפי מטה וכלפי מעלה גם עבור $x<0$.

x	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	מעלה		מטה		מטה		מעלה
$f''(x)$	חיובי		שלילי		שלילי		חיובי

תחומי קמירות כלפי מעלה: $x<-2, 2<x$.

תחומי קמירות כלפי מטה: $-2<x<0, 0<x<2$.

<u>שרטוט</u>

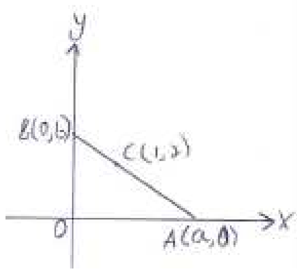


ב. על פי השרטוט ניתן לראות שכאשר $2<a<6$ אין למשוואה $f\left(x\right)=a$ פתרונות ממשיים.

<u>שאלה 3</u>

מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $C(1,2)$ כך ששטח המשולש הנמצא ברביע הראשון החסום ע"י הישר הנ"ל ושני צירי המערכת (ציר ה x וציר ה y) יהיה מינימאלי.

<u>פתרון שאלה 3</u>



נחשב את שטח המשולש AOB באמצעות a.

נשים לב ש $m_{AC}=m_{BC} \Leftarrow \frac{b-2}{-1}=\frac{2}{1-a} \Leftarrow b=2-\frac{2}{1-a}$.

$S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(2-\frac{2}{1-a}\right)=a-\frac{a}{1-a}$ הפונקציה המתארת את שטח המשולש היא

$f\left(a\right)=a-\frac{a}{1-a}$. נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f\left(a\right)=a-\frac{a}{1-a}\Rightarrow f'\left(a\right)=1-\frac{1\cdot\left(1-a\right)-\left(-1\right)\cdot a}{\left(1-a\right)^2}\Rightarrow f'\left(a\right)=1-\frac{1}{\left(1-a\right)^2}$$

$$1-\frac{1}{\left(1-a\right)^2}=0\Rightarrow\left(1-a\right)^2=1\Rightarrow a=2\vee a=0$$

$a=0$ נפסל.

$a=2$ חשוד לקיצון. נגזור פעם שנייה

$$f'\left(a\right)=1-\frac{1}{\left(1-a\right)^2}\Rightarrow f'\left(a\right)=1-\left(1-a\right)^{-2}\Rightarrow f''\left(a\right)=-\left(-2\right)\left(1-a\right)\cdot\left(-1\right)=2a-2\Rightarrow f''\left(2\right)=2>0$$

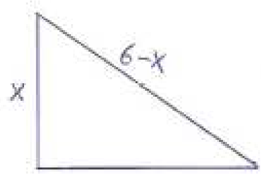
ולכן עבור $a=2$ נקבל שטח מינימאלי.

הישר עובר דרך הנקודות $\left(1,2\right),\left(2,0\right)$ ולכן משוואת הישר $y=-2x+4$.

<u>שאלה 4</u>

הוכח שבמשולש ישר זווית שבו סכום אורכי היתר ואחד הניצבים שווה ל 6, שטחו קטן מ 5.

<u>פתרון שאלה 4</u>



נחשב את שטח המשולש באמצעות x.

נחשב את הניצב השני באמצעות משפט פיתגורס. $\sqrt{\left(6-x\right)^2-x^2}=\sqrt{36-12x}$.

שטח המשולש הוא $S=\frac{1}{2}x\sqrt{36-12x}$.

נגזור את הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{36-12x}$ ונקבל

$$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{36-12x}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-12}{2\sqrt{36-12x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{36-12x}}{2}-\frac{3x}{\sqrt{36-12x}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(36-12x)-6x}{2\sqrt{36-12x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{36-18x}{2\sqrt{36-12x}}$$

הנגזרת שווה לאפס כאשר $x=2$.

המכנה חיובי ולכן ניתן לבדוק את סימן הנגזרת השנייה של המונה בלבד. הנגזרת של המונה היא -18 ולכן כאשר $x=2$ נקבל שטח מקסימאלי.

$f\left(2\right)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{36-12\cdot2}=\sqrt{12}<5$.

<u>שאלה 5</u>

הוכח כי לכל $x>0$ $x>\ln\left(1+x\right)$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

נראה שהערך הקטן ביותר של הפונקציה $g\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$ בתחום $x\geq0$ הוא אפס.

$g'\left(x\right)=1-\frac{1}{1+x}\Rightarrow g'\left(x\right)=\frac{x}{1+x}$ לכל $x>0$ נקבל ש $g'\left(x\right)>0$ ולכן הפונקציה עולה ממש לכל $x>0$. מכיוון ש $g\left(0\right)=0$ נקבל שלכל $x>0$ $g\left(x\right)>0$ ואז $x>\ln\left(1+x\right)$.