

# תרגיל 11 אינפי 1

1. תהי  $f$  רציפה בכל נקודה בקטע  $(a, \infty)$  כך ש-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$  וגם  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$  (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש-  $f$  רציפה במ"ש בקטע  $(a, \infty)$ .
2. תהי פונקציה  $f$  המקיימת את התנאי הבא: קיים  $k > 0$  כך שלכל  $x_1, x_2 \in A$  מתקיים  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$  (זה נקרא תנאי ליפשיץ). הוכיחו/הפריכו:  $f$  רציפה במ"ש ב-  $A$ .
3. הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע  $[-4, 3]$ :  

$$f(x) = x^3 + x$$
4. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:
  - a.  $\sin e^x$  בקטע  $(0, \infty)$
  - b.  $\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$  בקטע  $(-\infty, \infty)$
  - c.  $\ln x$  בקטע  $(0, \infty)$
  - d.  $\ln(\ln(e^{e^x}))$  בקטע  $(-\infty, \infty)$
  - e.  $\sin \sqrt{x + 2\pi}$  בקטע  $(0, \infty)$
  - f.  $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$  בקטע מהצורה  $(\pi k, \pi k + \pi)$  עבור  $k$  שלם
  - g.  $\ln \left| 1 - \sin \frac{1}{x} \right|$  בקטע  $[0.1, \infty)$
5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
  - א. אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה במ"ש בכל קטע  $[n, n+1]$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $f$  רציפה במ"ש בכל  $\mathbb{R}$ .
  - ב. אם  $f, g$  רציפות במ"ש בקטע  $I$  אזי גם  $f + g$  רציפה במ"ש בקטע  $I$ .
  - ג. אם  $f, g$  רציפות במ"ש בקטע  $I$  אזי גם  $f \cdot g$  רציפה במ"ש בקטע  $I$ .
6. הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו  $f, g$  רציפות במ"ש וחסומות ב-  $\mathbb{R}$ . הוכיחו כי  $f \cdot g$  רציפה במ"ש ב-  $\mathbb{R}$ .
7. יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות במ"ש. הוכיחו כי  $f \circ g$  (הרכבה) רציפה במ"ש.

**בהצלחה!**