

בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-07) – מועד א

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה, כב שבט תשפה (20.2.25)

מרצה: פרופ' בועז צבאן

מתרגלים: גב' אושרית שטוסל, ד"ר פאבל שטיינר

משך הבחינה: שעתיים וחצי

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

הנחיות

1. יש לענות בגוף השאלון בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

2. המבחן מורכב משני חלקים.

(א) בחלק הראשון (30 נקודות) שאלות שיש לסמן עבורן נכון/לא נכון, ללא נימוק. **יש לענות על כל השאלות בחלק זה.**

כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 6 תשובות נכונות בחלק זה, ולהשלים בעזרת החלק השני ל 60 נקודות או יותר.

(ב) בחלק השני (66 נקודות) שאלות שיש לענות עליהן בכתב. **יש לענות על 2 שאלות מתוך 3.** משקל כל שאלה: 33 נקודות.

(ג) עד 4 נקודות יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות של התשובות. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון, כיתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה.

3. בשאלה עם כמה סעיפים הנקודות מתחלקות בשווה, בקירוב, בין סעיפי השאלה.

4. אם המקום המיועד לתשובה לא מספיק, אפשר להמשיך את הפתרון במקומות הבאים, לפי סדר עדיפויות יורד:

(א) גב הדף של השאלה שאתם פותרים.

(ב) שני הדפים הנוספים בסוף המבחן (בשני העמודים של כל דף).

(ג) דף של שאלה אחרת (שני צדדיו).

(ד) בטופס נוסף שתבקשו מהבוחנים, וישודך לטופס המקורי.

בכל מקרה כזה יש לציין בכל עמוד שהסתיים היכן הפתרון ממשיך.

5. אם אתם כותבים פתרון שאלה בעמוד אחר מעמוד השאלה, יש לציין בעמוד של השאלה את מיקום הפתרון.

בהצלחה!

חלק ראשון: שאלות כן/לא

לכל אחת מהטענות הבאות, סמנו האם היא נכונה או לא נכונה. אין צורך לנמק.

א. תהי A קבוצה כך שבין כל שני מספרים רציונלים יש איבר של הקבוצה A . אזי בין כל שני מספרים אירציונלים יש איבר של הקבוצה A .

נכון / לא נכון

ב. לכל סידרה חסומה ומתכנסת יש זנב מונוטוני.

נכון / לא נכון

ג. קיימת סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שקבוצת הגבולות החלקיים שלה היא $[-e^{\pi}, \pi^e]$.

נכון / לא נכון

ד. יהי $0 < a$. אם $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ ו $a_n \rightarrow a$ אז $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$.

נכון / לא נכון

ה. אם $0 < a_n$ לכל n ו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} < \infty$ (כאשר $s_n := a_1 + \dots + a_n$ לכל n).

נכון / לא נכון

ו. אם טור חיובי מתכנס לפי מבחן המנה, אז הוא מתכנס גם לפי מבחן השורש.

נכון / לא נכון

ז. לכל טור, קיימת דרך להוסיף לו סוגריים כך שהוא מתכנס במובן הרחב.

נכון / לא נכון

ח. עבור טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, לכל n נסמן $p_n := \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n \leq 0 \end{cases}$ ו $q_n := \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ -a_n & a_n \leq 0 \end{cases}$.

$\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם הטורים $\sum p_n$ ו $\sum q_n$ מתכנסים.

נכון / לא נכון

ט. יהיו $-\infty \leq a, b \leq \infty$, ונתון $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. תהי V סביבה של b .

אז יש סביבה מנוקבת U של a כך שלכל x בתחום הפונקציה מתקיים: $f(x) \in V$ אם ורק אם $x \in U$.

נכון / לא נכון

י. לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים $\sin x < x < \tan x$.

נכון / לא נכון

חלק שני: שאלות כתיבה

ענו בצורה מלאה ומנומקת על שתי שאלות מבין שלושת השאלות הבאות.

שאלה 1

השאלה עוסקת במשפט הבא.

תהי $-\infty \leq a \leq \infty$. יהיו f, g גזירות בסביבה מנוקבת של a כך ש $g'(x) \neq 0$ בסביבה זו, ומתקיים:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

אם הגבול $b := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, אז גם $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

המשפט תקף גם עבור סביבה חד-צדדית של a וגבולות חד-צדדיים מתאימים.

א. נסח והוכח את המקרה $x \rightarrow 0^+$.

ב. הוכח את המקרים הבאים, לפי הסדר הבא.

1. $x \rightarrow 0^-$

2. $x \rightarrow 0$

3. $x \rightarrow \infty$

תשובה:

אין קשר בין סעיפי השאלה הבאה. מותר להשתמש בכל מה שנלמד בקורס.

שאלה 2

א. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה, ויהי a מספר ממשי כך ש $a \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

הוכח את הטענה הבאה:

a גבול חלקי של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} \iff$ כל סביבה של a מכילה איבר מהסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בכל הישר הממשי, ותהי a נקודה המקיימת $f(a) < 0$. הוכח שיש סביבה של a שבה מתקיים $f(x) < 0$.

שאלה 3

לכל אחת מהפונקציות הבאות: גזור את הפונקציה בתחום המצויין, וציין האם יש נקודות בתחום המצויין שבהן הפונקציה אינה גזירה.

א. $\sin(\log|x|)$ בתחום $x \neq 0$.

ב. x^x בתחום $x > 0$.

ג. $f(x) := \begin{cases} -x^3 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \end{cases}$ בתחום \mathbb{R} .

ד. $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{2}{x^2} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ בתחום \mathbb{R} .

תשובה:

דף נוסף ראשון לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)

דף נוסף שני לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)