מבוא לפיסיקה מודרנית – תרגול IV

<u>טרנספורמציית המהירויות:</u>

במערכת o ידוע שמתקיים כי $U_x=\frac{dx}{dt},U_y=\frac{dy}{dt},U_z=\frac{dz}{dt}$.

ובמערכת o' מתקיים $U'_x=\frac{dx'}{dt'},U'_y=\frac{dy'}{dt'},U'_z=\frac{dz'}{dt'}$. ידוע לנו כי $x'=(x-vt)\gamma$. ז"א ש$dx'=\gamma(dx-vdt)$. באופן דומה, אנחנו יודעים ש$t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)$ ולכן $dt'=\gamma\left(dt-\frac{vdx}{c^2}\right)$. (גם $dy'=dy\,,dz'=dz$)

כעת, נחשב את $U'_x=\frac{dx'}{dt'}=\frac{\gamma(dx-vdt)}{\gamma\left(dt-\frac{vdx}{c^2}\right)}=\frac{\frac{dx}{dt}-v}{1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}=\frac{U_x-v}{1-\frac{v}{c^2}U_x}$. ולכן $U'_x=\frac{U_x-v}{1-\frac{v}{c^2}U_x}$.

באופן דומה נחשב עבור כל רכיב של המהירות, ונקבל $U'_y=\frac{U_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vU_x}{c^2}}$.

הטרנספורמצייה המלאה היא
$$\begin{cases}\frac{U_x-v}{1-\frac{v}{c^2}U_x}=U'_x\\ \frac{U_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vU_x}{c^2}}=U'_y\\ \frac{U_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vU_x}{c^2}}=U'_z\end{cases}$$
וגם
$$\begin{cases}\frac{U'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}U_x}=U_x\\ \frac{U'_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{vU_x}{c^2}}=U_y\\ \frac{U'_z\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{vU_x}{c^2}}=U_z\end{cases}.$$

דוגמה: חללית A שולחת קרן אור נעה במהירות C. חללית B נעה במהירות U ביחס לA. מה תהיה מהירות קרן האור לפי B?

פתרון: $\frac{U_x-v}{1-\frac{v}{c^2}U_x}=U'_x=\frac{c-v}{1-\frac{vc}{c^2}}=C$ ולכן מהירות האור נשארת קבועה גם אחרי טרנסופרמציה זו.

דוגמה: קרן אור נעה בזווית כלשהי ביחס לציר x. מה גודלה וכיוונה של הקרן בo כאשר o' נעה במהירות v ביחס לo?

פתרון: בעיה דו מימדית. נפרק את המהירות לצירים. חשוב לזכור שקרן אור היא עם מהירות C. $U'_x=\frac{C(Ccos\alpha-v)}{C-Cvcos\alpha}=\frac{Ccos\alpha-v}{1-\frac{v}{c^2}Ccos\alpha}$.

הרכיב בציר y הוא $U'_y=\frac{c^2\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c-vcos\alpha}=\frac{c\,sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vcos\alpha}{c}}=\frac{U_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{vU_x}{c^2}}$. נחשב את הגודל, ז"א $U'=\sqrt{{U'_x}^2+{U'_y}^2}$. נציב את הרכיבים שפיתחנו ונקבל
$$U'=\sqrt{\left(\frac{C(Ccos\alpha-v)}{c-vcos\alpha}\right)^2+\left(\frac{c^2\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c-vcos\alpha}\right)^2}=\sqrt{\frac{C^2(C^2\cos^2\alpha-2C\cos\alpha v+v^2)+C^4\sin^2\alpha\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{(c-vcos\alpha)^2}}$$

כעת נראה את השינוי בזווית. מתקיים $\tan\alpha'=\frac{U'_y}{U'_x}=\frac{\frac{c^2\sin\alpha\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c-vcos\alpha}}{\frac{C(Ccos\alpha-v)}{C-Cvcos\alpha}}=\frac{Csin\alpha}{\gamma(C\cos\alpha-v)}$. אם נביט במקרי קצה, זווית של *0,90* ניתן להבין את התנועה באופן טוב יותר.

דוגמה: גרעין רדיואקטיבי נע במהירות *c/2* ביחס למעבדה. הגרעין עובר אינטרקציה ופולט אלקטרון הנע במהירות *0.9c*, ביחס לגרעין ולאוך כיוון מהירותו.

א. מצא את מהירות האלקטרון במערכת המעבדה
ב. חזור על א' אם האלקטרון נפלט באותה מהירות במאונך לכיוון תנועת הגרעין.

פתרון:

א. $\frac{U'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}U_x}=\frac{0.9C+\frac{C}{2}}{1+0.9\cdot0.5}=0.965C=U_x$

ב. צריך לקחת בחשבון שתי צירים. $\frac{U'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}U_x}==\frac{C}{2}=U_x$ וגם $\frac{U'_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{vU_x}{c^2}}=U_y$