

תרגול 7

ז'ירדון של מטריצה נילפוטנטית

מצאו בסיס מז'רדן למטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ראשית, נחשב את הפולינום האופייני $p_A(x) = x^5$, כלומר זוהי מטריצה נילפוטנטית
- שנית, נמצא את הפולינום המינימלי $m_A(x) = x^3$, בפרט המטריצה נילפוטנטית מסדר 3
- כעת נמצא בסיס ל- $C(A^{3-1})$ מהצורה $A^2 v_1, A^2 v_2, \dots, A^2 v_k$ באופן הבא:
 - נבחר עמודות של המטריצה A^2 המהוות בסיס ל- $C(A^2)$
 - כל עמודה i שבחרנו ניתן להציג כ- $A^2 e_i$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב העמודות הינו $A^2 e_1$

- כעת המסלול $A^2 e_1, A e_1, e_1$ הוא חלק של הבסיס המז'רדן משמאל לימין. שימו לב שסדר הוקטורים בבסיס המז'רדן חשוב מאד.

- השלב הבא הוא להשלים את הבסיס שמצאנו ($A^2 e_1$) לבסיס למרחב $N(A) \cap C(A^{3-2}) = N(A) \cap C(A)$ מהצורה Av_1, Av_2, \dots, Av_p באופן הבא:
 - נבחר בסיס u_1, \dots, u_r למרחב העמודות $C(A)$
 - נפתור את המערכת $A(a_1 u_1 + \dots + a_r u_r)$ על מנת למצוא בסיס ל $N(A) \cap C(A)$
 - נשמיט וקטורים על מנת שלא תהא תלות לינארית בבסיס שבחרנו עד כה

בדוגמא שלנו, העמודה הראשונה, השנייה והחמישית מהוות בסיס למרחב העמודות של A:

$$\begin{aligned} u_1 &= (0, 0, 0, 1, 0) \\ u_2 &= (1, 0, -1, 0, 0) \\ u_3 &= (-1, 1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

כעת נפתור את המערכת $a_1 Au_1 + a_2 Au_2 + a_3 Au_3 = 0$, זהו בדיוק מרחב האפס של המטריצה Au_1, Au_2, Au_3 :
שעמודותיה הן Au_1, Au_2, Au_3 :

$$N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

כיוון שאלו המקדמים a_1, a_2, a_3 אנו מקבלים את בסיס ל $N(A) \cap C(A)$:

$$\{u_2, u_3 - u_1\} = \{Ae_2, A(e_5 - e_1)\}$$

הערה: שימו לב ש $u_3 = Ae_5$ כיוון שזו העמודה החמישית

כיוון ש $Ae_2 = A^2 e_1$ אנו משמטים איבר זה ונשארים עם $A(e_5 - e_1)$

- המסלול $A(e_5 - e_1), e_5 - e_1$ משלים לנו את הבסיס המז'רדן.

סיכום

הבסיס המז'רדן הינו

$$A^2 e_1, Ae_1, e_1, A(e_5 - e_1), e_5 - e_1$$

נסמן ב-P את המטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי (לא במפתיע) מתקיימת המשוואה הבאה:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$