

מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ג סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד ב'

יש לענות על כל השאלות. יש לנמק באופן מלא את כל הטענות שלך. כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. תהי G חבורה ותהי $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית מאינדקס n . יהי $g \in G$ ויהי t המספר החיובי הכי קטן כך ש- $g^t \in N$. הוכח כי $t \mid n$.
2. תמייך, עד כדי איזומורפיזם, את כל החבורות האבליות מסדר 24. כלומר, תרשום רשימה של חבורות כך שכל חבורה אבלית מסדר 24 איזומורפית בדיוק לאחת מן החבורות ברשימה.
3. תהי G חבורה. הוכח שהיא אבלית אם ורק אם ההעתקה $f : G \rightarrow G$ המוגדרת על ידי $f(g) = g^{-1}$ הינה איזומורפיזם.
4. תהי G חבורה סופית. לכל $g \in G$ נסמן ב- \mathcal{C}_g את מחלקת הצמידות של g . יהי $n \geq 1$. הוכח כי הסדר של \mathcal{C}_{g^n} מחלק את הסדר של \mathcal{C}_g .
5. תהי G חבורה סופית, יהי $k > 1$. הוכח שאם ההעתקה $f : G \rightarrow G$ שמוגדרת על ידי $f(g) = g^k$ הינה חד-חד-ערכית ועל (תשימו לב שהיא לא בהכרח הומומורפיזם, כי לא הנחנו ש- G אבלית) אזי $\gcd(k, |G|) = 1$.